

TMA227/LGMA62 — Övningsuppgifter

En lista som skapats för att ge en uppfattning om vad som kan komma på tentan.

1 Del 1 – Någorlunda standardiserade problem

Här sammanfattar jag några av kategorierna av problem som kan dyka upp, och lösas med hyfsat standardiserade metoder. Listan ska inte ses som uteslutande, utan snarare en lista på vad jag tycker är viktigast.

1.1 Differensekvationer

Ni förväntas kunna lösa andra ordningens linjära differensekvationer med konstanta koefficienter, och polynom och exponentiella faktorer i högerledet. Alltså, lös

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = k^n P(n),$$

där P är något polynom, och $k \in \mathbb{R}$. Trigonometriska faktorer kommer inte förekomma i högerledet på tentan, men kan ingå i den homogena lösningen.

Problem

1. Hitta den allmänna lösningen till

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3^n.$$

2. Hitta den allmänna lösningen till

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = n - 3.$$

3. Hitta den allmänna lösningen till

$$2y_{n+2} + 3y_{n+1} - 2y_n = 2^{n-3}.$$

4. Hitta den allmänna lösningen till

$$y_{n+2} + 4y_n = (-1)^n + n^2 - 1.$$

1.2 Projektioner

Givet ett underrum U , med en given bas, förväntas ni kunna omvandla basen till en ortogonalbas (eller ON-bas) med hjälp av Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod. Ni förväntas också kunna projekteringsformeln; om $u \in V$ och U är ett underrum med ortogonalbas $e_1, \dots, e_n$, så är ortogonalprojektionen av u på U given av

$$u' = \frac{\langle u, e_1 \rangle}{\langle e_1, e_1 \rangle} e_1 + \dots + \frac{\langle u, e_n \rangle}{\langle e_n, e_n \rangle} e_n.$$

Om inget annat anges, så är skalärprodukten i $\mathbb{R}^n$ den vanliga.

Problem

5. Betrakta underrummet $U \subseteq \mathbb{R}^4$ givet av

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (a) Ange en bas för U .
- (b) Ange en ON-bas för U .
- (c) Bestäm ortogonalprojektionerna av vektorn v på underrummet U , där

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3 Underrum

Du förväntas kunna avgöra om en mängd $M \subseteq V$ är ett underrum till V , med hjälp av de tre kraven (Sats 1.2).

Problem

6. Låt V vara rummet av kontinuerliga funktioner $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Avgör om följande mängder är underrum till V .

(a)

$$A = \left\{ f \in V : \int_0^1 f(x)e^{-x}dx = 0 \right\},$$

(b)

$$B = \{f \in V : f(x) \leq |x|, \forall x \in [-1, 1]\},$$

(c)

$$C = \{f \in V : f(-x) = f(x) \quad \forall x \in [-1, 1]\}$$

(d)

$$D = \left\{ f \in V : \int_0^2 f(x)^2 dx = \int_0^1 f(2x) dx \right\},$$

1.4 Nollrum och värderum

Givet en linjär avbildning F , ofta angiven som en matris A , förväntas ni (bland annat) kunna följande.

1. Hitta en matrisrepresentation A för F i en given bas.
2. Använda rad- och kolonnoperationer för att hitta $N(A)$ och $V(A)$
3. Använda dimensionssatsen för att beräkna $\dim N(F)$ och $\dim V(F)$ (om den ena är känd).

Problem

7. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ange en bas för $N(A)$, och en bas för $V(A)$.

8. Låt $\mathcal{P}_d$ vara vektorrummet av polynom av grad högst d , och låt $F : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_1$ vara en linjär avbildning med

$$F(x^3) = 3x + 2, \quad F(x^2) = 2x, \quad F(x) = x - 1, \quad F(1) = x.$$

(a) Bestäm $\dim V(F)$.

(b) Hitta en bas för $N(F)$.

1.5 Konvergens av numeriska serier

Du förväntas kunna avgöra om en serie är konvergent. Här är en guide till hur det kan göras, givet en serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

1. Går *termerna* a_k mot 0? Om inte, så är serien **divergent**.
2. Kolla om den uppfyller något av "specialfallen":
 - (a) Om serien är alternerande, testa Leibniz konvergenstkriterium.
 - (b) Kolla om serien är teleskoperande, det vill säga kan skrivas som $a_k = b_k - b_{k+1}$ för någon konvergent sekvens b_k .
 - (c) Ibland kan integralkriteriet vara lämpligt.
3. Om specialmetoderna inte lyckades, betrakta serien $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$, om serien inte redan är positiv. Vi kan testa rot- och kvotkriterierna.
 - (a) Om a_k innehåller fakulteter $k!$, så kan kvotkriteriet vara lämpligt.
 - (b) Om a_k innehåller någon exponentiell faktor (och kvotkriteriet inte redan gett gränsvärde 1), testa rotkriteriet. Det kan vara lämpligt att använda Stirlings formel,

$$k! = \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi k}(1 + \varepsilon_k).$$

4. Om varken rot- eller kvotkriteriet är lämpligt, så vill du använda jämförelsekriteriet i någon av dess former. Det första steget är att göra en "asymptotisk överslagsräkning", genom att identifiera vilka termer som är dominanta i $|a_k|$, och hitta en enklare följd b_k sådan att vi känner till huruvida $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar. Till exempel är

$$a_k = \frac{k^2 - 5k + 1}{k^3 + \sqrt{k}} \approx \frac{k^2}{k^3} = \frac{1}{k}, \quad \text{för stora } k.$$

Då låter vi $b_k = 1/k$, och eftersom $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är divergent så tror vi att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ också är det. Det fattas att göra det formellt, och det finns två varianter.

- (a) (Ren tillämpning av jämförelsekriteriet). Vi visar antingen att $|a_k| \leq b_k$ för alla k (om vi vill visa konvergens), eller att $|a_k| \geq b_k$ för alla k (om vi vill visa divergens). Vi behöver ibland multiplicera b_k med en konstant för att olikheten alltid ska gälla. I vårt exempel har vi inte $|a_k| \geq b_k$ för alla k , men vi har $|a_k| \geq b_k/1000$, och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k/1000$ är divergent.
- (b) (Gränsvärdesvarianten). Om vi vill slippa arbetet med att hitta en konstant att multiplicera med, räcker det att beräkna $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k/b_k$, om möjligt. Om detta gränsvärde är positivt, så har $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ samma konvergensstatus. I vårt exempel är $a_k/b_k \rightarrow 1$, och $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergent, så vi slutsatsar att $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är divergent.

Problem

Här ger jag många deluppgifter i en och samma uppgift. Att avgöra en series konvergens kommer oftast vara värt ungefär en halv uppgift på tenta, alltså cirka 4 poäng.

9. Avgör om serien är absolut konvergent, betingat konvergent, eller divergent;

(a)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+3)!}$$

(b)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{k}$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k - \sqrt{k}}}{k^2}$$

(d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{(2k)!}$$

(e)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k\sqrt{k}}$$

(f)

$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{\ln^2 k}$$

1.6 Funktionsserier

Problem

10. Avgör konvergensradien för följande serier.

(a)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{3^k},$$

(b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{k \ln k},$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^k}{k^k}.$$

1.7 Likformig konvergens

För en funktionsföljd $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ förväntas ni kunna hitta gränsfunktionen f , och avgöra om $f_n \rightarrow f$ likformigt på ett givet intervall. För en funktionsserie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ förväntas ni kunna använda Weierstrass majorantsats för att visa likformig konvergens. Ni förväntas också kunna tillämpa likformig konvergens för att byta ordning på gränsvärden, och byta ordning mellan summation och integration.

Problem

11. Betrakta funktionsföljden $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ given av

$$f_n(x) = nx e^{-nx}.$$

Visa att f_n inte konvergerar likformigt på $[0, 1]$ då $n \rightarrow \infty$.

12. Visa att funktionsserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 e^{-x} + n e^{-nx}}$$

är likformigt konvergent på $[0, 1]$.

2 Del 2 – Teori och problemlösning

Uppgifterna här kräver oftast lite mer kreativitet än de i föregående sektioner.

13. Bestäm konvergensraden för potensserien $\sum_{n=0}^{\infty} y_n x^n$, där $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ är lösningen till

$$y_{n+1} - 4y_n = 1,$$

med begynnelsevillkor $y_0 = 1$ och $y_1 = 1$.

14. Bestäm fourierserien för funktionen $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ given av $f(x) = x$.

15. Betrakta vektorrummet ℓ^2 av talföljder $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ sådana att $\sum_{n=0}^\infty a_n^2$ konvergerar.

(a) Visa att

$$\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$$

konvergerar för alla $\{a_n\}, \{b_n\} \in \ell^2$.

(b) Visa att

$$\langle \{a_n\}, \{b_n\} \rangle = \sum_{n=0}^\infty a_n b_n$$

är en skalärprodukt på ℓ^2 .

16. Ändrad 30/5 till att kräva en kontinuerlig följd — påståendet är fortfarande sant utan det kravet, men lite svårare att visa.

Låt $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ vara en följd av kontinuerliga funktioner, definierad på $I = [0, 1]$, sådan att $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ för varje $x \in I$. Betrakta följande påståenden:

A: $f_n \rightarrow 0$ likformigt på I ,

B: för varje talföljd $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, med $x_n \in I$ för alla n , gäller att $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = 0$.

Visa att A och B är ekvivalenta, genom att:

(a) visa att A medför B,

(b) visa att B medför A.

17. Antag att $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty$ är talföljder med $a_n, b_n > 0$ för alla n , och sådana att $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = A$ för en positiv konstant A . Antag också att $\sum_{n=1}^\infty b_n$ är konvergent. Visa att $\sum_{n=1}^\infty a_n$ är konvergent.

18. Låt V vara ett vektorrum, med ett underrum U som spänns upp av $u_1, \dots, u_n$. Låt

$$U^\perp = \{v \in V : \langle v, u_i \rangle = 0, i = 1, \dots, n\}.$$

(a) Visa att $U^\perp$ är ett underrum till V .

(b) Visa att $U^\perp \cap U = \{\vec{0}\}$.

19. Funktionen $y = \sin x$ uppfyller differentialekvationen

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Visa hur detta kan användas för att härleda Taylorserien

$$\sin x = \sum_{k=1}^\infty (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

20. Låt A vara en $m \times m$ -matris, och B en $m \times n$ -matris, där $m < n$. Är det möjligt att avbildningen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ given av

$$F(x) = B^T A B x$$

är inverterbar?

Tips. En linjär avbildning F på $\mathbb{R}^n$ är inverterbar om och endast om $\dim V(F) = n$.

21. Låt V vara vektorrummet av talföljder $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

(a) Visa att mängden U av konvergenta talföljder är ett underrum till V .

(b) Låt $\lambda \in \mathbb{R}$ och betrakta mängden

$$M_\lambda = \{\{a_n\}_{n=0}^\infty \in U : \lim a_n = \lambda\}.$$

För vilka värden på λ är M_λ ett underrum till V ?

22. Avgör för vilka värden $c > 0$ som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+c} \right)$$

är konvergent.

23. *Integralgränser ändrade 31/5, då tidigare gränser inte gjorde uppgiften lösbar med Weierstrass.*

Beräkna integralen

$$\int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} dx.$$

Om du ändrar ordningen mellan integration och summation, måste detta motiveras väl.

24. Visa att följande serier konvergerar, genom att använda det faktum att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n}}$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2} - e^{1/2n^2}.$$

25. Visa att ett icke-trivialt vektorrum måste innehålla oändligt många vektorer.
26. (a) Visa att om $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är en absolut konvergent serie, så är $\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k}$ absolut konvergent.
- (b) Ange ett exempel som visar att detta inte behöver vara sant när $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ är betingat konvergent.
27. Vi försöker skapa ett vektorrum som består av två element, $V = \{a, b\}$. Definiera addition på V genom

$$\begin{aligned} a \oplus a &= a, \\ a \oplus b &= b, \\ b \oplus a &= b, \\ b \oplus b &= b. \end{aligned}$$

Definiera skalärmultiplikation genom

$$\begin{aligned} \lambda \odot a &= a, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \\ 0 \odot b &= a, \\ \lambda \odot b &= b, \quad \forall \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Förklara varför detta *inte* är ett vektorrum.

28. Låt $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ vara vektorrummet av 3×3 -matriser. Låt

$$U = \{A \in V : A = -A^T\}.$$

- (a) Visa att U är ett underrum till V .
- (b) Ange en bas för U .
- (c) Låt $F : V \rightarrow V$ vara den linjära avbildningen

$$F(A) = A + A^T.$$

Avgör $\dim V(F)$.

29. Låt A vara en $n \times n$ -matris, och antag att $N(A) \cap V(A) = \{\vec{0}\}$.

- (a) Visa att $N(A^2) = N(A)$.
- (b) Visa att $V(A^2) = V(A)$.

30. Antag att $F : V \rightarrow V$ är en linjär avbildning sådan att $F(F(v)) = F(v)$ för alla $v \in V$.

(a) Visa att

$$U = \{v \in V : F(v) = v\}$$

är ett underrum till V .

(b) Visa att varje vektor $u \in V$ har en unik uppdelning

$$u = u_1 + u_2$$

där $u_1 \in N(F)$ och $u_2 \in U$.

31. *Fixad 31/5.*

Låt U, V, W vara vektorrum, och låt $F : U \rightarrow V$ och $G : V \rightarrow W$ vara linjära avbildningar. Låt $H(u) = G(F(u))$.

(a) Visa att H är en linjär avbildning.

(b) Anta att $N(G) \cap V(F) = \{\vec{0}\}$. Vilka av följande likheter måste då gälla? Om ja, ge ett bevis, och om nej, ge en motivering.

(i) $N(H) = N(F)$,

(ii) $N(H) = N(G)$,

(iii) $V(H) = V(F)$,

(iv) $V(H) = V(G)$.

32. Antag att V är ett ändligtdimensionellt vektorrum, och $U, W \subseteq V$ underrum. Visa att

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W.$$

33. Visa att följande är underrum till vektorrummet $\mathbb{R}^{\geq 1}$ av talföljder $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(a) Mängden av konvergenta talföljder.

(b) Mängden av begränsade talföljder.

(c) Mängden av monotona talföljder.

34. Låt V vara vektorrummet av kontinuerliga funktioner $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, med skalärprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Låt $U = \text{Span}\{1, x, e^x\}$.

(a) Hitta en ON-bas för U .

(b) Hitta ortogonalprojektionerna av x^2 på U .

35. *Uppgiften borttagen, då den var felformulerad.*

3 Svar, ledningar, lösningar

Med reservation för fel.

1. Karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ har lösningar $r_1 = 3$ och $r_2 = 1$, så den homogena lösningen är

$$y_n^{(h)} = A3^n + B,$$

där A och B är godtyckliga konstanter. Eftersom basen 3 i högerledet 3^n är en av rötterna, ansätter vi partikulärlösning

$$y_n^{(p)} = Cn3^n.$$

Denna sätts in, och vi identifierar koefficienter:

$$\begin{aligned} 3^n &= y_{n+2}^{(p)} - 4y_{n+1}^{(p)} + 3y_n^{(p)} \\ &= C(n+2)3^{n+2} - 4C(n+1)3^{n+1} + 3Cn3^n \\ &= 3^n(9Cn + 18C - 12Cn - 12C + 3Cn) \\ &= 3^n \times 6C. \end{aligned}$$

Vi får $C = 1/6$. Så den allmänna lösningen är

$$y_n = A3^n + B + \frac{n3^n}{6}.$$

2. Rötterna är båda 3, så

$$y_n^{(h)} = (An + B)3^n.$$

Vi ansätter

$$y_n^{(p)} = Cn + D.$$

Då får vi

$$\begin{aligned} n - 3 &= C(n+2) + D - 6(C(n+1) + D) + 9(Cn + D) \\ &= (C - 6C + 9C)n + (2C + D - 6C - 6D + 9D) \\ &= 4Cn + (-4C + 4D). \end{aligned}$$

Genom att identifiera koefficienter fås $4C = 1$ och $4D - 4C = -3$. Detta ekvationssystem har lösning $C = 1/4$ och $D = -1/2$, så

$$y_n = (An + B)3^n + \frac{n}{4} - \frac{1}{2}.$$

3.

$$y_n = A \left(\frac{1}{2} \right)^n + B(-2)^n + \frac{1}{96} 2^n.$$

Rätt ansats är $y_n^{(p)} = C2^n$.

4.

$$y_n = 2^n \left(A \cos \left(\frac{\pi}{2} n \right) + B \sin \left(\frac{\pi}{2} n \right) \right) + \frac{1}{5}(-1)^n + \frac{1}{5}n^2 - \frac{4}{25}n - \frac{37}{25}.$$

5. (a) Vi kollar först om vektorerna

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

är linjärt oberoende. Vi löser ekvationen $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$. Detta motsvarar ett ekvationssystem

$$\begin{cases} x + y & = 0, \\ x & - z = 0, \\ & y - z = 0, \\ x + y & = 0. \end{cases}$$

Detta har endast lösningen $x = y = z = 0$, så vektorerna är linjärt beroende. (Man kan föredra att göra vektorerna till kolonnvektorer i en matris och radreducera den.)

En bas ges då av de tre vektorerna själva.

(b) Vi tillämpar Gram-Schmidts ortogonaliseringsmetod, med v_1, v_2, v_3 som utgångspunkt.

Låt $e'_1 = v_1$, och

$$e'_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi fortsätter:

$$\begin{aligned} e'_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, e'_1 \rangle}{\langle e'_1, e'_1 \rangle} e'_1 - \frac{\langle v_3, e'_2 \rangle}{\langle e'_2, e'_2 \rangle} e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1/3}{15/9} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nu har vi en ortogonalbas, och en ON-bas ges av

$$e_1 = \frac{1}{\|e'_1\|} e'_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_2 = \frac{1}{\|e'_2\|} e'_2 = \frac{1}{\sqrt{15/9}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$e_3 = \frac{1}{\|e'_3\|} e'_3 = \frac{1}{\sqrt{40/25}} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Nu kan vi tillämpa projektionsformeln. Projektionen av v ges av

$$\begin{aligned} v' &= \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \langle v, e_3 \rangle e_3 \\ &= \frac{3}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{\sqrt{15}} \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{-2}{\sqrt{10}} \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Projektionen av v är alltså $v' = v$. (Detta händer då v tillhör U .)

6. A och C är underrum.

För att se att B inte är ett underrum, notera att funktionen $|x|$ tillhör B , men $2|x|$ inte gör det. Detta gör att B inte uppfyller kravet " $u \in B$ och $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda u \in B$ ".

För att se att D inte är ett underrum, notera att funktionen $f(x) = \frac{1}{2}$ tillhör rummet men $g(x) = 1$ inte gör det. Vi har $g = 2f$, så kravet " $u \in D$ och $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda u \in D$ " misslyckas.

7. Radreducering av A ger

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kolonner 1, 3, 4 är pivotkolonner, så en bas för $V(A)$ ges av motsvarande fyra kolonnvektorer i A ;

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

För att hitta en bas för nollrummet, noterar vi först och främst att $N(A) = N(A')$; radoperationer förändrar inte nollrummet. (En form av) den allmänna lösningen för $A'x = \vec{0}$ är

$$x_1 = 2s - t,$$

$$x_2 = s,$$

$$x_3 = -2t,$$

$$x_4 = t,$$

$$x_5 = t.$$

Från detta läser vi av en bas

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

genom att samla termerna med s respektive t .

8. (a) Värderummet $V(F)$ är ett underrum till $\mathcal{P}_1$, som har dimension 2. Så $\dim V(F) \leq 2$. Vi ser att $3x + 2$ och $2x$ båda tillhör $V(F)$, och det är tydligt att de är linjärt oberoende, så $\dim V(F) \geq 2$. Alltså är $\dim V(F) = 2$.
- (b) Dimensionssatsen ger att

$$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim \mathcal{P}_3,$$

så

$$\dim N(F) = \dim \mathcal{P}_3 - \dim V(F) = 4 - 2 = 2.$$

Vi behöver hitta två linjärt oberoende polynom p, q med $F(p) = F(q) = 0$ (för alla x). Det funkar bra att gissa sig fram här, vi ser till exempel att $F(x^2) = 2F(1)$, så

$$F(x^2 - 2) = F(x^2) - 2F(1) = 2x - 2x = 0,$$

så $p = x^2 - 2 \in N(F)$. Vi har också

$$F(x^3) = 3x + 2 = -2F(x) + 5F(1),$$

så

$$F(x^3 + 2x - 5) = 0.$$

Låt $q = x^3 + 2x - 5 \in N(F)$. Det är tydligt att p, q är linjärt oberoende, så de bildar en bas för $N(F)$.

Alternativt kan man notera att i de naturliga baserna $\{1, x, x^2, x^3\}$ och $\{1, x\}$, är en matrisrepresentation för F given av

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Man kan då bestämma $\dim V(A)$, och en bas för $N(A)$. Basen för $N(A)$ kommer ge *koordinaterna* för basen till $N(F)$ i basen $\{1, x, x^2, x^3\}$, och denna ska översättas till polynom för full poäng. För att få motsvarande bas som i lösningen ovan, så kan man se (med metoder som i föregående uppgift) att

$$N(A) = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

vilket alltså motsvarar $N(F) = \text{Span}\{x^2 - 2, x^3 + 2x - 5\}$.

9. Notera att för positiva serier räcker det att säga "konvergent", då det inte är möjligt att dessa är betingat konvergenta. Positiva serier är antingen (absolut) konvergenta eller divergenta.

(a) (Absolut) konvergent, jämför med $\sum k^{-3}$.

(b) Divergent, jämför med $\sum k^{-1}$.

(c) (Absolut) konvergent, jämför med $\sum k^{-3/2}$.

(d) (Absolut) konvergent, använd kvotkriteriet.

(e) Absolut konvergent, jämför absolutbeloppet med $\sum k^{-3/2}$.

(f) Betingat konvergent; använd Leibniz för att visa konvergens, och jämför absolutbeloppet med t.ex. $\sum k^{-1}$ för att visa absolut divergens.

10. (a) $R = 3$, använd rotkriteriet.

(b) $R = 1/\sqrt{2}$; vi har

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2^k |x|^{2k+1}}{k \ln k} \right)^{1/k} = 2|x|^2,$$

så serien konvergerar när $|x| < 1/\sqrt{2}$ och divergerar när $|x| > 1/\sqrt{2}$.

(c) $R = e$, använd Stirlings formel.

11. Punktvis konvergerar följden till funktionen $f(x) = 0$. Notera att om $x_n = 1/n$ så är $f_n(x_n) = e^{-1}$ för alla n . Detta val av x_n är det som maximerar f_n för varje n . Då är inte följden likformigt konvergent. (jmf uppgift 16)
12. Använd Weierstrass.
13. $R = \frac{1}{4}$.
14. Vi beräknar

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{(2\pi)^2}{2\pi} = 2\pi.$$

För $k \geq 1$ är

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{x \sin(kx)}{k} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx \right) \\ &= -\frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} \sin(kx) dx \\ &= \left[\frac{1}{k^2\pi} \cos(kx) \right]_{x=0}^{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

eftersom $\cos(2\pi k) = 0$ för alla $k \in \mathbb{Z}$. Det återstår att beräkna

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[\frac{-x \cos(kx)}{k} \right]_{x=0}^{2\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx \right) \\ &= -\frac{2}{k} + \frac{1}{k^2\pi} [\sin(kx)]_{x=0}^{2\pi} \\ &= -\frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Fourierserien ges då av

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \pi - \sum_{k \geq 1} \frac{2}{k} \sin(kx).$$

15. Använd $0 \leq |a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$.

- 16. (a)** Låt $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vara en godtycklig talföljd med $x_n \in [0, 1]$. Låt $\varepsilon > 0$, och låt N_ε vara sådan att

$$n \geq N_\varepsilon \implies |f_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [0, 1].$$

Då gäller särskilt för $n \geq N_\varepsilon$ att $|f_n(x_n)| < \varepsilon$ för alla $n \geq N_\varepsilon$, vilket innebär att $f_n(x_n) \rightarrow 0$ enligt definitionen av gränsvärde för talföljder.

- (b)** För varje $n \geq 1$ kan vi välja x_n sådan att

$$|f_n(x_n)| = \sup\{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\},$$

eftersom f_n är kontinuerlig och intervallet $[0, 1]$ slutet. Påstående B medför att $f_n(x_n) \rightarrow 0$, vilket medför att $f_n \rightarrow 0$ likformigt på $[0, 1]$.

- 17.** Se beviset av Sats 18.9.

- 18.** För **(a)**, använd Sats 1.2 med de tre underrumskraven. För **(b)**, anta att $v \in U^\perp \cap U$ och visa att $\langle v, v \rangle = 0$.

- 19.** Vi ansätter en lösning

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

till differentialekvationen. Vi har att

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2},$$

så $y'' + y = 0$ ger

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} + a_k] x^k. \end{aligned}$$

För att denna likheten ska gälla måste det vara så att

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = -a_k$$

för alla $k \geq 0$. Begynnelsevillkoren ger dessutom

$$0 = y(0) = a_0,$$

$$1 = y'(0) = a_1.$$

För jämna k gäller att

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{a_{k-2}}{k(k-1)} \\ &= \frac{a_{k-4}}{k(k-1)(k-2)(k-3)} \\ &= \dots = (-1)^{k/2} \frac{a_0}{k!}. \end{aligned}$$

Men $a_0 = 0$, så $a_k = 0$. På samma sätt, om k är udda är

$$a_k = (-1)^{(k-1)/2} \frac{a_1}{k!} = (-1)^{(k-1)/2} \frac{1}{k!}.$$

Alltså är $a_k = 0$ för jämna k och $a_k = (-1)^{(k-1)/2}/k!$ för udda k . Då är

$$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}.$$

- 20.** Det är inte möjligt. En linjär avbildning $F : U \rightarrow V$ har $\dim V(F) \leq \dim U$. Vi har $V(F) \subseteq V(B^T)$, eftersom vi kan se F som en sammansättning av avbildningarna B, A, B^T i den ordningen, och $\dim V(B^T) \leq m$.
- 21. (a)** Nollsekvensen är konvergent, och vi kan addera och multiplicera konvergenta följder utan att påverka konvergensen.
- (b)** Bara när $\lambda = 0$.
- 22.** Vi skriver

$$0 \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+c} = \frac{c}{n(n+c)} \leq \frac{c}{n^2}.$$

Serien är då konvergent enligt jämförelsekriteriet, för varje $c > 0$.

- 23.** Vi ändrar ordning på integral och summa. För detta behöver vi visa att serien är likformigt konvergent. Enligt Weierstrass majorantsats räcker det att notera att

$$ne^{-nx} \leq ne^{-n}, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

och att $\sum n = 1^\infty ne^{-n}$ är konvergent. Då följer det att funktionsserien är likformigt

konvergent, och vi har

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-nx} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^2 n e^{-nx} dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} - e^{-n} \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2}} - \frac{1}{1 - e^{-1}} \\
 &= \frac{e^2}{e^2 - 1} - \frac{e}{e - 1} \\
 &= \frac{e^2 - e(e + 1)}{e^2 - 1} \\
 &= \frac{-e}{e^2 - 1}.
 \end{aligned}$$

Här har vi använt att $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1/(1 - x)$ när $|x| < 1$.

24. (a) Ledtråden kan också skrivas som att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{1/n} = 1.$$

Vi modifierar detta så att det passar serien i fråga, $a_n = (e^{1/n} - 1)/\sqrt{n}$,

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n}} \times n^{3/2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^{-3/2}}.$$

Vi vet att $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2}$ är konvergent, så då är även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent enligt (gränsvärdesversionen av) jämförelsekriteriet.

Alternativt kan vi använda ledtråden såhär. Ledtråden ger att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(e^{1/n} - 1) = 1.$$

Då finns ett N sådant att om $n \geq N$ så är $1/2 \leq n(e^{1/n} - 1) \leq 3/2$ (enligt gränsvärdesdefinitionen). Då gäller att

$$0 \leq \frac{e^{1/n} - 1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\frac{3}{2n}}{\sqrt{n}} = \frac{3}{2n^{3/2}}.$$

Tillämpa jämförelsekriteriet.

(b) Informellt tänker vi att

$$e^x \approx 1 + x$$

för små x , så då bör vi ha, för stora n ,

$$e^{1/n^2} - e^{1/2n^2} \approx \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}.$$

Detta guidar oss till rätt gränsvärde att beräkna, nämligen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n^2} - e^{1/2n^2}}{1/2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(e^{1/n^2} - 1) - (e^{1/2n^2} - 1)}{1/2n^2} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/n^2} - 1}{1/n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1/2n^2} - 1}{1/2n^2} \\ &= 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Gränsvärdesvarianten av jämförelsekriteriet ger att serien konvergerar, eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n^2$ gör det.

25. Om V är ett icke-trivial vektorrum, så måste det innehålla en vektor v som inte är dess nollvektor. För varje reellt tal λ gäller att $\lambda v \in V$. Vi visar att dessa är olika vektorer för alla λ .

Anta att $\lambda_1 v = \lambda_2 v$ för $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Då är

$$\vec{0} = \lambda_1 v - \lambda_2 v = (\lambda_1 - \lambda_2)v.$$

Vi multiplicerar båda sidor med $1/(\lambda_1 - \lambda_2)$, och får

$$\vec{0} = v.$$

Detta är en motsägelse, så det måste gälla att $\lambda_1 v \neq \lambda_2 v$ när $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Eftersom $\mathbb{R}$ är oändligt stort, är då även V det.

26. Många av räknergelerna funkar, och vi ser att a är rummets nollelement. Men, rummet saknar en additiv invers för b . Vi kan inte addera något till b och få nollelementet a . (Det finns flera andra sätt att motbevisa att det skulle vara ett vektorrum, vi kan till exempel hänvisa till föregående uppgift om att ett icke-trivialt rum måste innehålla oändligt många element.)
27. Börja med att övertyga/påminna dig själv om att $\dim V = 9$, och att "nollvektorn" i detta vektorrum är 3×3 -matrisen med bara nollor. Om man är van vid att tänka på linjära avbildningar som matriser kan denna uppgiften ställa till det för en, för nu är även variablerna matriser. Om vi skulle hitta en matrisrepresentation av F , så skulle den vara av storlek 9×9 , och våra 3×3 -matriser skulle behöva översättas till koordinatvektorer av längd 9 (till exempel genom att lägga kolonnerna efter varandra).

(a) Nollmatrisen är uppenbarligen med. Om $A, B \in U$, så är

$$A + B = -A^T - B^T = -(A + B)^T,$$

så $A + B \in U$. Om $A \in U$ och $\lambda \in \mathbb{R}$, så är

$$\lambda A = \lambda(-A^T) = -(\lambda A)^T,$$

så $\lambda A \in U$.

(b) För en allmän matris

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

så innebär $A = -A^T$ att

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -d & -g \\ -b & -e & -h \\ -c & -f & -i \end{pmatrix}$$

Vi ser då att om $A \in U$ så måste vi ha $a = e = i = 0$, och $b = -d, c = -g, f = -h$. Vi kan skriva

$$\begin{aligned} U &= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z \\ -y & -z & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Från detta avläser vi en bas för U , nämligen de tre matriserna i det sista uttrycket;

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Rummet U är $N(F)$, med dimension 3 (eftersom basen innehåller tre element) så dimensionssatsen ger

$$\dim V(F) = \dim(\mathbb{R}^{3 \times 3}) - \dim N(F) = 9 - 3 = 6.$$

28. (a) Anta att $x \in N(A)$. Då är

$$A^2x = A(Ax) = A\vec{0} = \vec{0},$$

så $x \in N(A^2)$. Detta visar att $N(A) \subseteq N(A^2)$.

Anta nu att $x \notin N(A)$. Då är $y = Ax \neq \vec{0}$, och vi har $y \in V(A)$ enligt definitionen av $V(A)$. Villkoret $V(A) \cap N(A) = \{\vec{0}\}$ ger att $y \notin N(A)$, alltså $Ay \neq \vec{0}$. Då är alltså

$$A^2x = A(Ax) = Ay \neq \vec{0},$$

så $x \notin N(A^2)$. Alltså, $x \notin N(A)$ medför $x \notin N(A^2)$. Då är $N(A^2) \subseteq N(A)$. Vi har visat att $N(A^2) = N(A)$.

- (b) Både A och A^2 är $n \times n$ -matriser, så dimensionssatsen (tillämpad två gånger) ger

$$\dim V(A^2) = n - \dim N(A^2) = n - \dim N(A) = \dim V(A)$$

29. (a) Kolla "de tre kraven" med hjälp av definitionen för linjära avbildningar.

- (b) Notera först att om $u \in V$ så är

$$F(u - F(u)) = F(u) - F(F(u)) = F(u) - F(u) = \vec{0},$$

så $u - F(u) \in N(F)$. Vi har också $F(u) \in U$, eftersom $F(F(u)) = F(u)$. Så en representation $u = u_1 + u_2$ ges av $u_1 = u - F(u)$ och $u_2 = F(u)$.

Vi har nu visat att $V = N(F) + U$, och vill visa att det är en direkt summa. Det räcker då att visa att $N(F) \cap U = \{\vec{0}\}$. Så, anta att $v \in N(F) \cap U$. Då gäller

$$v = F(v) = \vec{0}.$$

Den första likheten för att $v \in U$, den andra för att $v \in N(F)$. Alltså är $N(F) \cap U = \{\vec{0}\}$, så $V = N(F) \oplus U$, vilket skulle visas.

30. (a) Låt $u, v \in U$ och $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Eftersom F och G är linjära har vi då

$$\begin{aligned} H(\alpha u + \beta v) &= G(F(\alpha u + \beta v)) \\ &= G(\alpha F(u) + \beta F(v)) \\ &= \alpha G(F(u)) + \beta G(F(v)) \\ &= \alpha H(u) + \beta H(v), \end{aligned}$$

så H är linjär.

- (b) Vi har $F : U \rightarrow V, G : V \rightarrow W$ och $H : U \rightarrow W$, så

$$\begin{aligned} N(F) &\subseteq U, V(F) \subseteq V, \\ N(G) &\subseteq V, V(G) \subseteq W, \\ N(H) &\subseteq U, V(H) \subseteq W. \end{aligned}$$

Vi kan direkt utesluta att $N(G) = N(H)$ eller $V(F) = V(H)$ skulle gälla generellt, eftersom dessa är underrum till olika rum.

Vi visar att $N(F) = N(H)$. Anta först att $u \in N(F)$. Då är

$$H(u) = G(F(u)) = G(\vec{0}) = \vec{0},$$

eftersom varje linjär avbildning G har $G(\vec{0}) = \vec{0}$. Så $u \in N(H)$ för varje $u \in N(F)$, och $N(F) \subseteq N(H)$.

Anta att $u \notin N(F)$. Då är $F(u) \neq \vec{0}$, och $V(F) \cap N(G) = \{\vec{0}\}$ ger att $F(u) \notin N(G)$. Då är

$$H(u) = G(F(u)) \neq \vec{0},$$

så $u \notin N(H)$. Detta visar att $N(H) \subseteq N(F)$.

$V(G) = V(H)$ återstår. Detta kommer inte gälla generellt. Till exempel kan vi låta $U = \{\vec{0}\}$, $V = \mathbb{R}$, och $W = \mathbb{R}$. Det finns bara en linjär avbildning $F : U \rightarrow V$, nämligen $F(\vec{0}) = \vec{0}$. Vi kan låta $G : V \rightarrow W$ vara $G(v) = v$. Då är $V(H) = \{\vec{0}\}$ medan $V(G) = \mathbb{R}$. Så likheten gäller inte generellt.

- 31.** Se boken/anteckningar.
- 32.** Inga konstigheter, använd Sats 1.2.
- 33.** Gjordes på föreläsning.