

Matematisk Statistik och Diskret Matematik, MVE051/MSG810, VT22

Timo Vilkas



Chalmers - Göteborgs Universitet

Föreläsning 2
24 mars 2022



Stokastiska variabler

- En **stokastisk variabel (s.v.)** eller **slumpvariabel** X (eng. *random variable*) är en funktion som för varje utfall av ett slumpmässigt försök antar ett reellt tal. ($X : S \rightarrow \mathbb{R}$ där S är utfallsrummet).

Exempel (myntkast)

Ett mynt kastas två gånger. En person får 1 krona för varje gång myntet visar krona (och inte klave). $S = \{00, 01, 10, 11\}$ där 0 och 1 motsvarar klave och krona som vanligt. Detta ger upphov till en stokastiska variabel $X : S \rightarrow \{0, 1, 2\}$ sådant att $X(00) = 0, X(01) = X(10) = 1, X(11) = 2$



Diskret/kontinuerlig

- En s.v. som endast antar ett *ändligt* (eng. *finite*) eller uppräkneligt oändligt (eng. *countably infinite*) antal värden kallas en **diskret slumpvariabel**. $X(S)$ är värdemängden av X
- En s.v. som kan anta alla värden i ett givet intervall och sannolikheten för varje utfall är 0 kallas en **kontinuerlig slumpvariabel**.

Låt oss först titta närmare på diskreta slumpvariabler.

Sannolikhets- och fördelningsfunktion

För en diskret slumpvariabel X definierar vi den så kallade **sannolikhetsfunktionen**:

- Funktionen

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x), \quad x \in \mathbb{R}$$

kallas **sannolikhetsfunktion** eller **frekvensfunktion** till X .

- En funktion f är en sannolikhetsfunktion om och endast om $f(x) \geq 0$ och $\sum_{x \in X(S)} f(x) = 1$.

- Funktionen

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$= \sum_{y \leq x} f(y)$ för en diskret s.v.

kallas **fördelningsfunktion** till X .

Den är högerkontinuerlig i allmänhet och styckenvis konstant för en diskret s.v.

Exempel

Visa att funktionen

$$f(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

och $f(x) = 0$ annars, är en sannolikhetsfunktion och beräkna $\mathbb{P}(X \geq 4)$ och $F(10)$ där F är motsvarande fördelningsfunktion.

- uppenbarligen är $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ och
 $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \stackrel{\text{geom. \sum (se nästa sida)}}{=} 1 \Rightarrow f \text{ är en slkf.}$
- $\mathbb{P}(X \geq 4) = \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}$
- $F(10) = \mathbb{P}(X \leq 10) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 0.999$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Geometrisk följd och summa

Låt $(ar^k)_{k \in \mathbb{N}}$ vara en geometrisk följd (eng. *geometric sequence*)

- För $r \neq 1$ gäller $\sum_{k=1}^n ar^k = \frac{ar(1-r^n)}{1-r}$ och
- $\sum_{k=1}^{\infty} ar^k = \frac{ar}{1-r}$ om dessutom $|r| < 1$.

Beris: • $(1-r) \cdot \sum_{k=1}^n ar^k = a(1-r) \cdot (r + r^2 + \dots + r^n) = a(r + \cancel{r^2} + \dots + \cancel{r^n} - \cancel{r^2} - \dots - \cancel{r^n} - r^{n+1})$
 $\stackrel{r \neq 1}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^n ar^k = a \cdot \frac{r(1-r^n)}{1-r}$

- Om $|r| < 1$ går $r^n \rightarrow 0$ när $n \rightarrow \infty$ och gränsvärdet blir
 $\sum_{k=1}^{\infty} ar^k = a \cdot \frac{r(1-0)}{1-r} = \frac{ar}{1-r} \quad \square$
(i exemplet ovan är $a=1, r=\frac{1}{2}$)

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Väntevärde

Låt X vara en diskret s.v. med sannolikhetsfunktion f .

- **Väntevärdet** (eng. *expectation (value)*) av X ges av

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(S)} x \cdot f(x), \quad \text{där } f(x) = \mathbb{P}(X=x)$$

om $\sum_x |x| \cdot f(x) < \infty$. Väntevärdet betecknas ofta med μ .

- Mer allmänt, Om h är en funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, så kan vi beräkna

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{x \in X(S)} h(x) \cdot f(x)$$

om $\sum_x |h(x)| \cdot f(x) < \infty$.

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Exempel (myntkast)

Om myntet är symmetriskt, dvs. sannolikheten för krona respektive klave $\frac{1}{2}$ vardera, är väntevärdet av vinsten i exemplet ovan

$$\mathbb{E}[X] = \overset{0}{x(00)} \cdot \overset{\frac{1}{4}}{p(00)} + \overset{1}{x(01)} \cdot \overset{\frac{1}{4}}{p(01)} + \overset{1}{x(10)} \cdot \overset{\frac{1}{4}}{p(10)} + \overset{2}{x(11)} \cdot \overset{\frac{1}{4}}{p(11)} = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

Exempel (tärning)

Låt oss kasta en vanlig tärning en gång och skriva Y för antalet ögon den visar. Då är

$$\mathbb{E}[Y] = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot \frac{1}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Varians och standardavvikelse

Låt X vara en diskret s.v. med sannolikhetsfunktion f och väntevärde $\mathbb{E}[X] = \mu$.

- **Variansen** (eng. *variance*) av X definieras som

$$\begin{aligned} \text{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in X(S)} (x - \mu)^2 f(x) \\ &= \mathbb{E}[h(X)] \text{ för } h(x) = (x - \mu)^2 \\ &\quad \rightarrow \text{inget skrämmande} \end{aligned}$$

Variansen betecknas ofta med σ^2 .

- **Standardavvikelsen** (eng. *standard deviation*) av X definieras som

$$\sigma = \sqrt{\text{Var}[X]}.$$

Väntevärde - räkneregler

För en konstant c och två stokastiska variabler X och Y har vi följande **räkneregler för väntevärdet**:

- $\mathbb{E}[c] = c$
 - $\mathbb{E}[cX] = c \mathbb{E}[X]$
 - $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- } Med andra ord:
Väntevärdet är linjärt.

Räkneregler för variansen:

- $\text{Var}[c] = 0$
 - $\text{Var}[cX] = c^2 \text{Var}[X]$
 - $\text{Var}[X + c] = \text{Var}[X]$
 - $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$ om X och Y är oberoende.
- i allmänhet fel annars*

Bevis: direkt ur definitionen (plus lite räkning)

Sats

Låt $\mathbb{E}[X]$ och $\text{Var}[X]$ vara väntevärdet och variansen av en s.v. X , så gäller

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

Bevis: $\text{var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mu)^2]$ (där $\mu = \mathbb{E}[X]$)

$$= \mathbb{E}[X^2 - 2\mu \cdot X + \mu^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[-2\mu X] + \mathbb{E}[\mu^2] \quad (\text{linjaritet})$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu \cdot \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{=\mu} + \mu^2 \quad (\text{linjaritet, } \mu \text{ konstant})$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \quad \square$$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Exempel (myntkast)

I ingångsexemplet gäller för sannolikhetsfunktionen $f(0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = \frac{1}{2}$ och $f(2) = \frac{1}{4}$, vilket leder till

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1$$

Det betyder att om vi repeterar försöket oändligt många gånger skulle medelvärdet av antalet kronor per försök bli 1.

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{1}{4} \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{4} \cdot 2^2 = \frac{3}{2} \quad \text{som då ger}$$

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad \text{och } \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Exempel (tärning)

För tärningen får vi $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{6} (1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36) = \frac{91}{6}$

$$\text{och därmed } \text{Var}[Y] = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Anmärkning

- Variansen/standardavvikelsen beskriver hur mycket X avviker från μ .
- Standardavvikelsen har samma enhet som mätvärdena.
- En tolkning av standardavvikelsen till en s.v. blir mest intressant när man jämför två slumpvariabler.

Till exempel om X och Y är två s.v. med $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = 70$, $\sigma_X = 5$ och $\sigma_Y = 30$, betyder det att de olika värdena av X ligger samlade nära medelvärdet, medan värden av Y är mycket mer utspridda.

Bernoullifördelning

- Låt X ta värden 0 och 1 och dess sannolikhetsfunktion vara

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{om } x = 1 \\ 1 - p & \text{om } x = 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

Motsvarande fördelning heter **Bernoullifördelning** med parameter p och förkortas ofta med **Ber(p)**.

- 0 brukar tolkas som misslyckande (eng. *failure*) i ett försök och 1 kallas lyckande (eng. *success*).
- $\mathbb{E}[X] = p$ och $\text{Var}[X] = p(1 - p)$. (räkna själv!)

Geometrisk fördelning

- I ett försök inträffar en händelse A med sannolikhet p (Bernoulli experiment). Försöket upprepas tills A inträffar för första gången (repetition av ett bernoullisexperiment).
- Försöken är identiska och oberoende av varandra (dvs. sannolikheten att A inträffar är p i varje försök, oavsett tidigare utfall).
- Låt X räkna antal försök som behövs tills A inträffar, $X(S) = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Geometrisk fördelning

Då gäller:

$\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 2) = (1 - p)p$, $\mathbb{P}(X = 3) = (1 - p)^2 p$, osv.
och allmänt för $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p.$$

Fördelningen heter **geometrisk fördelning** (på $\mathbb{N}$) med parameter p och förkortas ofta med $\text{Geom}(p)$.

[$X - 1$ som räknar antal misslyckande har geometrisk fördelning (med parameter p) på $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.]

Binomialfördelning

- Låt oss titta på oberoende repetitioner av ett bernoulliexperiment, precis som ovan ($\mathbb{P}(A) = p$ i varje omgång).
- Låt X räkna antal gånger A inträffar i de första n försöken, $X(S) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$.

Då gäller:

$$\mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^n, \mathbb{P}(X = 1) = n(1 - p)^{n-1}p,$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{n}{2}(1 - p)^{n-2}p^2 \text{ och allmänt för } k \in \{0, 1, \dots, n\}:$$

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k}(1 - p)^{n-k}p^k.$$

Fördelningen heter **Binomialfördelning** med parametrar n och p och förkortas ofta med **Bin(n, p)**

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Momentgenererande funktion (m.g.f.)

- Momenten till en slumpvariabel X är värdena $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[X^3]$, ...
- Väntevärdet är det första momentet och variansen är differensen mellan det andra och kvadraten av det första.
- Den **momentgenererande funktionen** av X är

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$$

- Uppenbarligen är $m_X(0) = 1$, men det är inte garanterat att $\mathbb{E}[e^{tX}]$ existerar för andra värden av t .

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Sats

Låt X vara en slumpvariabel för vilken $\mathbb{E}[e^{tX}]$ existerar för t tillräckligt nära 0. Då gäller

$$\mathbb{E}[X^k] = \left. \frac{d^k m_X(t)}{dt^k} \right|_{t=0}.$$

Bevis: $e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = 1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \frac{d}{dt} \mathbb{E} \left(1 + \frac{tX}{1!} + \frac{t^2 X^2}{2!} + \frac{t^3 X^3}{3!} + \dots \right) \\ &\stackrel{\text{teori}}{=} \mathbb{E} \left(\frac{d}{dt} \left(1 + \frac{tX}{1!} + \frac{t^2 X^2}{2!} + \frac{t^3 X^3}{3!} + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \mathbb{E} \left(X + \frac{tX^2}{1!} + \frac{t^2 X^3}{2!} + \dots \right). \text{ Sätter man } t=0 \text{ fås alltså } \mathbb{E}(X)$$

För $k > 1$: $\frac{d^k}{dt^k} \mathbb{E}(e^{tX}) = \mathbb{E} \left(X^k + \frac{tX^{k+1}}{1!} + \frac{t^2 X^{k+2}}{2!} + \frac{t^3 X^{k+3}}{3!} + \dots \right); t=0 \text{ ger påståendet.}$

□

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Geometrisk fördelning

För $X \sim \text{Geom}(p)$ ges sannolikhets- och fördelningsfunktionen av $f(k) = p(1-p)^{k-1}$, för $k \in \mathbb{N}$, $f(x) = 0$ annars, geom. summa där $a = \frac{p}{1-p}$, $r = (1-p)$ respektive $F(k) = 1 - (1-p)^k$. $\left[F(k) = \sum_{m=1}^k f(m) \stackrel{\text{geom. summa}}{=} \frac{p}{1-p} \cdot (1-p) \cdot \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} \right]$

Den momentgenererande funktionen till X ges av

$$m_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}, \quad \left[\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{t \cdot k} \cdot f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p}{1-p} (e^t (1-p))^k \stackrel{\text{geom. summa}}{=} \frac{p}{1-p} \cdot \frac{e^t (1-p)}{1 - (1-p)e^t} \right]$$

där $q = 1 - p$, för $t < -\ln(q)$.
 $\hookrightarrow$ vilket gör att $e^t(1-p) < 1$

Med $m'_X(t) = \frac{pe^t}{(1-qe^t)^2}$ och $m''_X(t) = \frac{pe^t(1+qe^t)}{(1-qe^t)^3}$ (räkna själv!) följer

$$\mathbb{E}[X] = m'_X(0) = \frac{1}{p} \text{ samt } m''_X(0) = \frac{p(1+q)}{p^3} = \frac{1+q}{p^2} \text{ och}$$

$$\text{Var}[X] = m''_X(0) - (m'_X(0))^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

Binomialfördelning

För $X \sim \text{Bin}(n, p)$ ges sannolikhetsfunktionen av

$$f(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k & \text{om } k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

För fördelningsfunktion kan man använda tabell I i boken (s.687-691).

Den momentgenererande funktionen till X ges av

$$m_X(t) = (q + pe^t)^n, \quad \begin{aligned} \mathbb{E}(e^{tX}) &= \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (p \cdot e^t)^k (1-p)^{n-k} \stackrel{\text{Binomialsats}}{=} ((1-p) + pe^t)^n \end{aligned}$$

där $q = 1 - p$, $t \in \mathbb{R}$.

Då $X = \sum_{i=1}^n X_i$ för $X_1, X_2, \dots, X_n$ oberoende

Ber(p)-slumpvariabler följer med hjälp av räknereglerna ovan

omedelbart $\mathbb{E}[X] = np$ och $\text{Var}[X] = npq$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] \stackrel{\text{lin.}}{=} \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = np; \quad \text{Var}(X) \stackrel{X_i \text{ oberoende}}{=} \text{Var}(X_1) + \dots + \text{Var}(X_n) = np(1-p) \end{aligned}$$