

# Matematisk Statistik och Diskret Matematik, MVE051/MSG810, VT22

Timo Vilkas



Chalmers - Göteborgs Universitet

Föreläsning 12  
10 maj 2022



Navigation icons: back, forward, search, etc.

Partialbråksuppdelning  
Rekursioner  
Exponentiella genererande funktioner

## Partialbråksuppdelning

När det gäller att hantera genererande funktioner är det ofta betydligt enklare att addera än att multiplicera två sådana. Därför är partialbråksuppdelning (att skriva om ett bråk med en produkt i nämnaren till en summa med enklare nämnare) ett viktigt verktyg:

### Exempel

Skriv  $\frac{2x+1}{(x-4)(x+2)}$  som en summa av enklare bråk.

$$\begin{aligned}
 &\bullet \text{ tolkningen på nämnaren: } \frac{1}{(x-4)(x+2)} = \frac{A}{x-4} + \frac{B}{x+2} \Rightarrow \begin{matrix} A = \frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{6} \end{matrix} \\
 &\bullet \frac{2x+1}{(x-4)(x+2)} = \frac{2x+1}{6} \left[ \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+2} \right] = \frac{2x+1}{6} \left[ \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{1-\frac{x}{4}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{x}{2}} \right] \\
 &\hspace{15em} \rightarrow \text{geometrisk summa}
 \end{aligned}$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

## Partialbråksuppdelning

- Vi fokuserar på nämnaren.

- För varje linjärfaktor ställer vi upp en summand.

$$\text{t.ex. } \frac{1}{(x+7)(x-3)(x-5)} = \frac{A}{x+7} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{x-5} \quad (A, B, C \in \mathbb{R})$$

- För högre potenser av linjärfaktorer: en summand för varje potens.

$$\text{t.ex. } \frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x+1)}$$

- För faktorer av grad två ska det stå  $Ax + B$  i täljaren.

$$\text{t.ex. } \frac{1}{(x^2+1)(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-2}$$

- För högre potenser av kvadratiske faktorer: en summand för varje potens.

$$\text{t.ex. } \frac{1}{(x^2+1)^2(x-2)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{E}{(x-2)^2} + \frac{F}{(x-2)}$$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

## Rekursionsekvationer

Genererande funktionen till en talföljd  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  ges av

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Genererande funktioner kan också med fördel användas för att lösa rekursiva ekvationer. För att illustrera metoden, låt oss kika på ett exempel:

### Exempel

Låt  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$  vara en talföljd som uppfyller följande ekvationer  $a_0 = a_1 = 0$  och  $a_{k+1} = 8a_k + 9 \cdot 10^{k-1}$  för  $k \geq 1$ . Vi vill gärna hitta en explicit formel för  $a_k$  och kan göra det med hjälp av verktyget *genererande funktion*.

$$\begin{aligned} \cdot a_2 &= 8 \cdot a_1 + 9 \cdot 10^0 = 9 \\ \cdot a_3 &= 8 \cdot 9 + 9 \cdot 10^1 = 162 \\ \cdot a_4 &= 8 \cdot 162 + 9 \cdot 10^2 = 2196 \end{aligned}$$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

### Exempel

Först gånger vi båda sidor av rekursionen med  $x^{k+1}$  och sedan adderar ihop alla ekvationer, vilket ger

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} x^{k+1} &= 8 \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{k+1} + 9 \sum_{k=1}^{\infty} 10^{k-1} x^{k+1} \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 8x \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k + 9x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (10x)^k \\ &= f(x), \text{ då } a_0 = a_1 = 0 \quad = 8x f(x) + 9x^2 \frac{1}{1-10x} \end{aligned}$$

Då  $a_0 = a_1 = 0$  blir det omedelbart en rekursionsekvation för den genererande funktionen  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ :

$$f(x) = 8x \cdot f(x) + \frac{9x^2}{1-10x}.$$

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

### Exempel

Löser man ut  $f$  fås  $f(x) = \frac{9x^2}{(1-8x)(1-10x)}$ .

Partialbråksuppdelning i form av  $\frac{1}{(1-8x)(1-10x)} = \frac{A}{1-8x} + \frac{B}{1-10x}$  leder till  $A = -4, B = 5$

Vi vet att  $\frac{1}{1-10x} = \sum_{k=0}^{\infty} (10x)^k$  och  $\frac{1}{1-8x} = \sum_{k=0}^{\infty} (8x)^k$  (för tillräckligt litet  $|x|$ )

Använder vi våra kunskaper om geometriska summor ser vi att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 9x^2 \left[ -4 \sum_{k=0}^{\infty} 8^k x^k + 5 \sum_{k=0}^{\infty} 10^k x^k \right]$$

En enkel jämförelse av koefficienter ger  $a_k = 45 \cdot 10^{k-2} - 36 \cdot 8^{k-2}$  för  $k \geq 2$ .

Navigation icons

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810



## Fibonacci talen

### Exempel

Nollställena till nämnaren ges av  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Med  $\varphi := -x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  och  $\psi = -x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  följer  $-(x + \varphi)(x + \psi) = 1 - x - x^2$ . Dessutom gäller  $\varphi\psi = -1$ , vilket medför  $\frac{1}{\varphi} = -\psi$  samt  $\frac{1}{\psi} = -\varphi$  (räkna själv!)  
 Partialbråuppdelningen leder till

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x-x^2} &= \frac{x}{\varphi\psi(x+\varphi)(x+\psi)} = \frac{x}{\varphi\psi} \left( \frac{1/\sqrt{5}}{x+\psi} + \frac{-1/\sqrt{5}}{x+\varphi} \right) \\ &= x \left( \varphi \frac{1/\sqrt{5}}{1-\varphi x} - \psi \frac{1/\sqrt{5}}{1-\psi x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \varphi x \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi x)^n - \psi x \sum_{n=0}^{\infty} (\psi x)^n \right). \end{aligned}$$

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

## Fibonacci talen

### Exempel

Vi har kommit fram till

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi x)^n - \sum_{n=1}^{\infty} (\psi x)^n \right).$$

En enkel koefficientjämförelse levererar  $F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$  för alla  $n \geq 1$ .

Anmärkning:

- $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\dots$  kallas det **gyllene snittet** (för en annan anledning).
- Då  $\psi < 1 < \varphi$  gäller för stora  $n$ :  $F_n \approx \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$ .

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

## Definition

För en talföljd  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  definierar vi den **exponentiella genererande funktionen** (eng. *exponential generating function*) som

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Den har i allmänhet en större så kallad konvergensradie än den vanliga genererande funktionen.

### Exempel

Hur många strängar på fyra bokstäver kan bildas ur alfabetet  $\{a, b, c, d\}$  om det ska vara ett jämnt antal  $a$ , högst tre  $b$  och ett udda antal  $c$ ?

### Exempel

Som förr kan vi bilda den vanliga genererande funktionen  
 $f(x) = (1 + x^2 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3)(x + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$   
 $= x + 2x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 12x^5 + \dots$  och dra slutsatsen att det finns 8 (= koeff. av  $x^4$ ) stycken val när det gäller symbolerna:  $aabc, aacd, bbcb, bbcd, bccc, bcdd, cccd, cddd$ .

Beroende på valet finns det dock olika många sätt att ordna dem, t.ex.  $\binom{4}{1,3} = \frac{4!}{1!3!} = 4$  för  $cddd$  och  $\binom{4}{2,1,1} = \frac{4!}{2!1!1!} = 12$  för  $aabc$ .

Ett sätt att fläta ihop både sammansättning och ordning är att betrakta de exponentiella genererande funktionerna istället:

$g(x) = (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!})(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!})(x + \frac{x^3}{3!})(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!})$ .  
 Då bidrar  $aabc$  till termen av fjärde potens i  $g(x)$  nämligen med  $\frac{x^2}{2!} \cdot x \cdot x = \binom{4}{2,1,1} \frac{x^4}{4!}$  och  $cddd$  med  $x \cdot \frac{x^3}{3!} = \binom{4}{1,3} \frac{x^4}{4!}$ .

Koefficienten  $a_4$  framför  $\frac{x^4}{4!}$  i  $g(x)$  är  $\frac{8}{3} \cdot 4! = 64$ , som är svaret på vår fråga ovan.



## Symbolsträngar

### Sats

Antag att det finns  $n$  olika symboler. Låt  $M_i \subseteq \mathbb{N}$  vara mängden av tillåtna antal som symbol nummer  $i$  får förekomma,  $1 \leq i \leq n$ . Låt  $g_i(x) = \sum_{k \in M_i} \frac{x^k}{k!}$  och

$$g(x) = g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_n(x) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

Då anger koefficienten  $a_k$  antalet strängar av längd  $k$  som innehåller  $k_i \in M_i$  symboler av typ  $i$  ( $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ ).

Bevis: Precis som i exemplet ovan ges koef. av  $x^k$  i  $g(x)$  som

$$\sum_{\substack{k_1 \in M_1, \dots, k_n \in M_n \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \text{ alltså } a_k = \sum_{\substack{k_1 \in M_1, \dots, k_n \in M_n \\ k_1 + \dots + k_n = k}} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!},$$

där  $\{(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n; k_1 \in M_1, \dots, k_n \in M_n, k_1 + \dots + k_n = k\}$  är alla olika sätt att välja  $k$  symboler, under de givna restriktionerna, och  $\binom{k}{k_1, \dots, k_n} := \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}$  är antalet olika ordningar per val.

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810

□.

## Vanliga exponentiella genererande funktioner

①  $a_k = 1$  för alla  $k \in \mathbb{N}_0$  ger  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

②  $a_k = c^k$  för  $c \in \mathbb{R}$  ger  $e^{cx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(cx)^k}{k!} = 1 + cx + \frac{(cx)^2}{2!} + \dots$

t.ex.  $e^{-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!}.$

③  $a_k = 1$  för jämna  $k$  och  $a_k = 0$  för udda  $k$  ger

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

④  $a_k = 0$  för jämna  $k$  och  $a_k = 1$  för udda  $k$  ger

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$$

T. Vilkas

Matematisk statistik & diskret matematik, MVE051/MSG810