Övningstenta

U1 (a) $\frac{7!}{2!}$ (ordnat urval av 5 utav 7)

vilka platser

$$\binom{7}{5} \cdot 5! = \frac{7!}{2!\,\cancel{5!}}\cancel{5!} = \frac{7!}{2!} = 2520 \quad \text{sätt att sitta}$$

ordningen på valda platserna

(b) Det finns 3 sätt att välja 2 tomma platser i kanterna.

Svar: $3 \cdot 5! = 360$

(c) I (b) är motsvarande slh. 1,

i (a) $$\frac{\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{2}{7}$$

$\binom{4}{2}$ ← sätt att välja tomma platser utan 3 mellersta

$\binom{7}{2}$ ← sätt att välja tomma platser

U2 täthetsfunktion $f(x) = c \cdot e^{-|x|}$

(a) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = c \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,dx = 2c \cdot \int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

(b) $$m_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{tx} \cdot e^{x}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}\,dx = \left[\frac{e^{(t+1)x}}{t+1}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{t+1} \quad [t > -1]$$

$$\int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot e^{-x}\,dx = \int_{0}^{\infty} e^{(t-1)x}\,dx = \left[\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\right]_{0}^{\infty} = -\frac{1}{t-1} \quad [t < 1]$$

$$\Rightarrow m_X(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{t^2-1}\right) = -\frac{1}{t^2-1} \quad [t \in (-1,1)]$$

(c) $$m_X'(t) = (t^2-1)^{-2} \cdot 2t = \frac{2t}{(t^2-1)^2}$$

$$m_X''(t) = \frac{2(t^2-1)^2 - 2t \cdot 2 \cdot (t^2-1) \cdot 2t}{(t^2-1)^4} = -\frac{6t^2+2}{(t^2-1)^3}$$

$$\mathbb{E}X = m_X'(0) = 0$$

$$\mathbb{E}X^2 = m_X''(0) = 2, \quad \mathrm{var}(X) = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - 0^2 = 2$$

U3 $f(x,y) = \frac{x}{3y}$ för alla $x,y \in \{1,2,3,4\}$ som uppfyller $x<y$

(a) $P(Y=3) = f_Y(3) = P(X=1,Y=3) + P(X=2,Y=3) = \frac{1}{9}+\frac{2}{9} = \frac{1}{3}$

$$f_{X|3}(x) = \frac{f_{XY}(x,3)}{f_Y(3)} = \frac{x/9}{1/3} = \frac{x}{3} \quad \text{för } x \in \{1,2\}$$

(b) $$P(X\leq 2 \mid Y>2) = \frac{P(X\leq 2, Y>2)}{P(Y>2)} = \frac{7/12}{5/6} = \frac{7}{10}$$

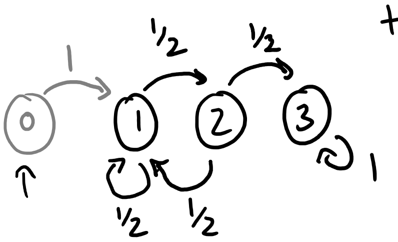
$$P(Y>2) = P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{1}{3} + \underbrace{\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}\right)}_{=\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$$P(X\leq 2, Y>2) = P(X=1,Y=3) + P(X=1,Y=4) + P(X=2,Y=3) + P(X=2,Y=4)$$
$$= \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$$

(c) $P(X=2,Y=2) = 0 \neq P(X=2)\cdot P(Y=2) = \left(\frac{2}{9}+\frac{2}{12}\right)\cdot \frac{1}{6} > 0$

→ Nej, inte oberoende.

U4 (a) $S = \{1,2,3\}$ där t.ex. 2 betyder att det som kom sist kom två gånger på rad



$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} Q & & R \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \hspace{2em} I \end{array}$$

(b) $Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, $N = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

$$= 4\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$d = N\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ anger hur många steg från transient tillstånd till absorption

Svar: $d_1 + 1 = 7$ omgångar i väntevärde tills spelet är slut.

U7 $$g(x) = (1+x+x^2+x^3)(x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)(1+x^2+x^4)$$
$$= x + 3x^2 + 7x^3 + 12x^4 + 18x^5 + 23x^6 + \ldots + 3x^{13} + x^{14}$$

Antalet sätt att välja 5 bollar under givna restriktionerna är koeff. framför x^5 i $g(x)$ alltså 18.

45

(a) $\sum_{i=1}^{10} x_i = 300.2$ alltså $\bar{x} = 30.02$ $(n = 10)$

(b) $z_{\alpha/2} = 1.96$ för $\alpha = 0.05$

$\Rightarrow$ ett 95% K.I. för μ med $\sigma = \frac{1}{5}$ ges av

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(30.02 - 1.96 \frac{1/5}{\sqrt{10}}, 30.02 + 1.96 \frac{1/5}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= (29.896, 30.144)$$

(c) $t_{\alpha/2} = 2.262$ (9 frihetsgrader)

$$s^2 = \frac{n \sum_i x_i^2 - (\sum_i x_i)^2}{n(n-1)} = \frac{10 \cdot 9012.4 - (300.2)^2}{10 \cdot 9} = 0.044$$

$\Rightarrow$ ett 95% K.I. för μ med okänd σ ges av

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 30.02 \pm 2.262 \cdot \sqrt{\frac{0.044}{10}} = 30.02 \pm 0.15$$

alltså $(29.87, 30.17)$.

46

(a) $$\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{1}{n} \cdot \hat{p}(1-\hat{p})}} \sim N(0,1) \quad \text{(CGS)}, \quad \hat{p} = \frac{1984}{10000}$$

$$-z_{0.995} \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{1}{n} \hat{p}(1-\hat{p})}} \leq z_{0.995} = 2.576$$

$$\Leftrightarrow p \in \hat{p} \mp z_{0.995} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{1984}{10000} \mp 2.576 \cdot 0.003988$$
$$= [0.1881, 0.2086]$$

Svar: p ligger i $[0.1881, 0.2086]$ med 99% säkerhet.

(b) $$n = \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{d^2} = \frac{1.96^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{(0.02)^2} \approx 1537 \quad (\hat{p} = \tfrac{1}{5})$$

$$n = \frac{z_{\alpha/2}^2}{4d^2} = 2401 \quad (\text{okänd } \hat{p})$$

U8

(a) $$b_1 = \frac{n\sum a_i h_i - \sum a_i \sum h_i}{n\sum a_i^2 - (\sum a_i)^2} = 0.126444193$$

$$b_0 = \bar{h} - b_1 \bar{a} = 1.4653$$

Svar: $y = 0.1264\, x + 1.4653$

(b) $H_0: \beta_1 = 0$ teststatistik $T = \frac{B_1 - \beta_1^0}{S/\sqrt{S_{xx}}}$ ($\beta_1^0 = 0$) ($n-2 = 8$ frihetsgrader)

$H_1: \beta_1 \neq 1$

$$S^2 = \frac{S_{yy} - B_1 S_{xy}}{n-2} \Rightarrow s^2 = 0.1466$$

och $S_{xx} = \sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i^2) = 7164.9$

$S_{yy} = \sum Y_i^2 - \frac{1}{n}(\sum Y_i^2) \Rightarrow 115.724 = S_{yy}$

$S_{xy} = \sum x_i Y_i - \frac{1}{n}(\sum x_i)(\sum Y_i) \Rightarrow 905.96 = S_{xy}$

$$t = \frac{0.12644}{0.0045} = 27.98 \gg t_{0.025} = 2.306$$

→ H_0 bör förkastas; det finns ett linj. samband!

(c) Ett 90% KI för B_0 ges av

$$b_0 \pm t_{0.05} \cdot \frac{s}{\sqrt{n\, S_{xx}}} \sqrt{\sum_i x_i^2} = [0.936, 1.994]$$