

Kombinatorik

$n!$ permutationer/ordningar av en mängd med n element

$\frac{n!}{(n-k)!}$ ordnade urval av k stycken

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ oordnade urval av k stycken

$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$ ordningar av n element där n_i stycken är av typ i och $n = n_1 + \dots + n_k$

Sannolikheter / händelser

$A \subseteq S$
händelse ← utfallsrum

parvis disjunkta

① $P(A) \geq 0$ ② $P(S) = 1$ ③ $P\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} P(A_j)$ om $A_i \cap A_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$
t.ex. Laplace experiment: $|S| \in \mathbb{N}$, $P(A) = \frac{|A|}{|S|}$

Räkneregler:

$$P(A') = 1 - P(A), \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ [= P(A) + P(B) \quad \text{om } A, B \text{ disjunkta}]$$



Betingad slh:

För händelser A, B med $P(B) > 0$ är $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$= P(A) \cdot P(B) \Leftrightarrow A, B \text{ oberoende}$$

Total slh.

(A_j) partition dvs. $\bigcup_j A_j = S$, $A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow P(B) = \sum_j P(B \cap A_j)$

Bayes (A_j) partition, $P(B) > 0 \Rightarrow P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum_i P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$
med $P(A_j) > 0$

Fördelningar

diskret

Slh.funktion $f_X(x) = P(X=x)$
för $x \in \mathbb{R}$.

$$Eh(X) := \sum_{x \in X(S)} h(x) \cdot \overset{P(X=x)}{f_X(x)}$$

kontinuerlig

täthetsfunktion $f_X(x)$ som uppfyller
 $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$
för godtyckliga $a, b \in \mathbb{R}$.

$$Eh(X) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot f_X(x) dx$$

Fördelningsfkt. $F_X(x) = P(X \leq x)$ (för kontinuerlig X : $F_X'(x) = f_X(x)$
för $x \in \mathbb{R}$, där f_X är kontinuerlig)

varians: $\text{var}(X) = E((X - EX)^2) = EX^2 - (EX)^2$

standardavvikelse: $\sigma = \sqrt{\text{var}(X)}$

Räkneregler: X, Y sv. $c \in \mathbb{R}$

- $E(c \cdot X + Y) = c \cdot EX + EY$ (linjäritet)
- $\text{var}(cX) = c^2 \cdot \text{var}(X)$
- $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$ bara om X, Y oberoende

moment genererande funktion

$$m_X(t) = E(e^{tX}) \Rightarrow m_X^{(k)}(0) = E(X^k) \text{ för godtyckligt } k \in \mathbb{N}. \quad \text{derivata av ordning } k$$

viktiga fördelningar

diskret

- Bernoulli, $\text{Ber}(p)$: $IP(X=1) = p = 1 - IP(X=0)$, $EX = p$, $\text{var}(X) = p \cdot (1-p)$, $m_X(t) = (1-p + pe^t)$
- binomial, $\text{bin}(n, p)$: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ för $k=0, \dots, n$
 $EX = np$, $\text{var}(X) = np(1-p)$, $m_X(t) = (1-p + pe^t)^n$.
- geometrisk, $\text{Geom}(p)$: $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ för $k \in \mathbb{N}$, $F_X(k) = 1 - (1-p)^k$
 $EX = \frac{1}{p}$, $\text{var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$, $m_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ [$t < -\ln(1-p)$].
- negativ binomial, $\text{NB}(r, p)$: $p_X(k) = \binom{k-1}{r-1} (1-p)^{k-r} p^r$
 $EX = \frac{r}{p}$, $\text{var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$, $m_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t} \right)^r$
- hypergeometrisk, $\text{HypGeo}(N, r, n)$: $p_X(k) = \frac{\binom{r}{k} \binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}}$ för $\max\{0, n-(N-r)\} \leq k \leq \min\{n, r\}$
 $EX = \frac{nr}{N}$, $\text{var}(X) = \frac{nr(N-r)(N-n)}{N^2(N-1)}$
- Poisson, $\text{Poiss}(\lambda)$: $p_X(k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
 $EX = \lambda$, $\text{var}(X) = \lambda$, $m_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$

kontinuerlig

- normal, $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$
 $EX = \mu$, $\text{var}(X) = \sigma^2$, $m_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{(\sigma t)^2}{2}\right)$.
- Gamma, $\Gamma(\alpha, \beta)$: $p_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}$ för $x > 0$, där $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1} e^{-z} dz$
 $EX = \alpha\beta$, $\text{var}(X) = \alpha\beta^2$, $m_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$ [$t < \frac{1}{\beta}$].
- exponential, $\text{Exp}(\lambda) = \Gamma(1, \frac{1}{\lambda})$: $p_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ för $x > 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$
 $EX = \frac{1}{\lambda}$, $\text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$, $m_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$ [$t < \lambda$].
- chi-kvadrat med γ frihetsgrader, $\chi^2(\gamma) = \Gamma(\frac{\gamma}{2}, 2)$:
 $EX = \gamma$, $\text{var}(X) = 2\gamma$, $m_X(t) = (1-2t)^{-\gamma/2}$ [$t < \frac{1}{2}$].
- t-fördelning med γ frihetsgrader: $p_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma+1}{2})}{\Gamma(\frac{\gamma}{2})\sqrt{\gamma\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{\gamma}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2}}$
 $ET = 0$ ($\gamma > 1$), $\text{var}(T) = \frac{\gamma}{\gamma-2}$ ($\gamma > 2$)

Viktiga relationer

- $X \sim \text{Bin}(n, p)$ är en summa av n oberoende $\text{Ber}(p)$ -variabler.
 - $X \sim \text{NB}(r, p)$ — " — r oberoende $\text{Geom}(p)$ -variabler.
 - $X \sim \text{Bin}(n, p)$ kan approximeras med $Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$ för fast $p \in (0, 1)$ och n stor
ofta räknas man $P(15 \leq \overset{\text{diskret}}{X} < 18) \approx P(14.5 \leq \overset{\text{kont.}}{Y} \leq 17.5)$
tumregel: $\min\{np, n(1-p)\} > 5$
 - $X \sim \text{Bin}(n, p)$ är approximativt $\text{Poiss}(np)$ fördelat för stort n , litet p (Poisson-antagande)
 - $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, så är $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, dvs. standardnormalfördelat
 - $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ oberoende $\Rightarrow X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2 \sim \chi^2(n)$
 - Om $N(t)$ räknar händelser under Poisson-antagande, dvs. $N(t) \sim \text{Poiss}(\lambda t)$,
så är väntetiden till nästa händelse $\text{Exp}(\lambda)$ -fördelat.
 - $Y = aX + b$ för $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow m_Y(t) = e^{bt} \cdot m_X(at)$
 - X, Y oberoende $\Rightarrow m_{X+Y}(t) = m_X(t) \cdot m_Y(t)$
- Då momentgenererande funktioner är karakteriserande följer omedelbart:
- Om X_1 och X_2 är oberoende gäller:
 - $X_1 \sim \text{Poiss}(\lambda_1), X_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \text{Poiss}(\lambda_1 + \lambda_2)$
 - $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
 - $X_1 \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), X_2 \sim \Gamma(\alpha_2, \beta) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$
 - i symmetri: $X_1 \sim \chi^2(r_1), X_2 \sim \chi^2(r_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \chi^2(r_1 + r_2)$
 - $X_1, X_2 \sim \text{Exp}(\lambda) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim \Gamma(2, \frac{1}{\lambda})$
 - Om $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ och $Y \sim \chi^2(r)$ är oberoende $\Rightarrow T = \frac{Z}{\sqrt{Y/r}}$ är t -fördelat med r frihetsgrader.

Två dimensionella (beroende) slumpvariabler (X, Y)

- kan också vara diskreta eller kontinuerliga

$$p_{XY}(x, y) = P(X=x, Y=y)$$

täthets fkt. $f_{XY}(x, y)$ uppfyller (för $a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

$$P(X \in [a, b], Y \in [c, d]) = \int_a^b \int_c^d f_{XY}(x, y) dy dx$$

- marginella slh. / täthets funktioner

$$f_X(x) = \sum_{y \in Y(S)} p_{XY}(x, y)$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy$$

- Gemensamma händelser beräknas genom summation / integration över motsvarande område:

$$\text{ex. } P(X \in A, Y \in B) = \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} p_{XY}(x, y)$$

$$\text{eller } P(X \leq Y) = \sum_{y \in Y(S)} \sum_{x \leq y} p_{XY}(x, y)$$



$$P(X \in A, Y \in B) = \int \int_{A \times B} f_{XY}(x, y) dy dx$$

$$P(X \leq Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^y f_{XY}(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_x^{\infty} f_{XY}(x, y) dy dx$$

$$E h(X, Y) = \sum_{x \in X(S)} \sum_{y \in Y(S)} h(x, y) p_{XY}(x, y)$$

för $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

$$E h(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) f_{XY}(x, y) dy dx$$

$$X, Y \text{ oberoende} \Leftrightarrow p_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) \quad \left(\Rightarrow E(XY) = EX \cdot EY \right. \\ \left. \text{för } X, Y \text{ oberoende} \right)$$

$$\text{Kovarians: } \text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E(XY) - EX \cdot EY$$

cov är symmetrisk och linjär i båda argument.

$$\text{Korrelation } \rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X) \cdot \text{var}(Y)}}$$

$$X, Y \text{ okorrelerade om } \rho_{XY} = 0 \quad (\Leftrightarrow \text{cov}(X, Y) = 0)$$

$$-1 \leq \rho_{XY} \leq 1 \text{ och } |\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b \text{ för några } a \neq 0, b \in \mathbb{R}.$$

- Betingad fördelning:

slh. funktionen / täthets funktionen för Y givet $X=x$ ges av

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)}$$