

Sannolikhet och statistik VII

Johan Jonasson

April 2020

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .
Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

- Livslängden av en LED-lampa.
- Väntetiden till nästa bil som passerar på en enslig skogsväg.
- Tiden till nästa sönderfall hos ett radioaktivt material.

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

- Livslängden av en LED-lampa.
- Väntetiden till nästa bil som passerar på en enslig skogsväg.
- Tiden till nästa sönderfall hos ett radioaktivt material.

Vi ser att $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$,

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

- Livslängden av en LED-lampa.
- Väntetiden till nästa bil som passerar på en enslig skogsväg.
- Tiden till nästa sönderfall hos ett radioaktivt material.

Vi ser att $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, dvs $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$.

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

- Livslängden av en LED-lampa.
- Väntetiden till nästa bil som passerar på en enslig skogsväg.
- Tiden till nästa sönderfall hos ett radioaktivt material.

Vi ser att $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, dvs $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

- Livslängden av en LED-lampa.
- Väntetiden till nästa bil som passerar på en enslig skogsväg.
- Tiden till nästa sönderfall hos ett radioaktivt material.

Vi ser att $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, dvs $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx$$

Exponentialfördelning. En kont sv som har täthet

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x > 0$$

sägs vara *exponentialfördelad med parameter (intensitet) λ* .

Kortform $X \sim \exp(\lambda)$.

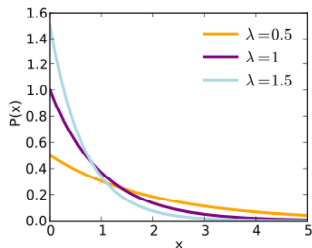
Uppstår som livslängd av saker som inte åldras, t.ex.

- Livslängden av en LED-lampa.
- Väntetiden till nästa bil som passerar på en enslig skogsväg.
- Tiden till nästa sönderfall hos ett radioaktivt material.

Vi ser att $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, dvs $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}.$$

Ex på frekvensfunktion för exponentialfördelningen:



Figur: Eponentialfördelning.

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år?

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år? Rimligt (?) att anta att lampan inte åldras

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år? Rimligt (?) att anta att lampan inte åldras och därmed att dess livslängd, X , är $\exp(\lambda)$ -fördelad,

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år? Rimligt (?) att anta att lampan inte åldras och därmed att dess livslängd, X , är $\exp(\lambda)$ -fördelad, där det verkar rimligt att tolka uppgiften som att $\mathbb{E}[X] = 10$,

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år? Rimligt (?) att anta att lampan inte åldras och därmed att dess livslängd, X , är $\exp(\lambda)$ -fördelad, där det verkar rimligt att tolka uppgiften som att $\mathbb{E}[X] = 10$, dvs $\lambda = 0.1$.

Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år? Rimligt (?) att anta att lampan inte åldras och därmed att dess livslängd, X , är $\exp(\lambda)$ -fördelad, där det verkar rimligt att tolka uppgiften som att $\mathbb{E}[X] = 10$, dvs $\lambda = 0.1$. Alltså

$$\mathbb{P}(X > 10) = e^{-0.1 \cdot 10} = e^{-1} \approx 0.37.$$



Det gäller också att

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

så

$$\mathbb{V}\text{ar}(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exempel: En LED-lampa sägs ha livslängd tio år. Hur stor är sannolikheten att den håller minst tio år? Rimligt (?) att anta att lampan inte åldras och därmed att dess livslängd, X , är $\exp(\lambda)$ -fördelad, där det verkar rimligt att tolka uppgiften som att $\mathbb{E}[X] = 10$, dvs $\lambda = 0.1$. Alltså

$$\mathbb{P}(X > 10) = e^{-0.1 \cdot 10} = e^{-1} \approx 0.37.$$

□

Allmän observation: $X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow \mathbb{P}(X > \mathbb{E}[X]) = e^{-1}$.

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$$

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$$

ty

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$$

ty

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t + x | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}\end{aligned}$$

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$$

ty

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X > t + x | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}}\end{aligned}$$

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$$

ty

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + x | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

Exponentialfördelningen uppfyller *glömskeegenskapen* (dvs inget åldrande):

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$$

ty

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > t + x | X > t) &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda x} = \mathbb{P}(X > x). \end{aligned}$$

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t .

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$.

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$,

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t .

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t . Subtrahera $G(x)$ från båda sidor,

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t . Subtrahera $G(x)$ från båda sidor, dela med t

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t . Subtrahera $G(x)$ från båda sidor, dela med t och låt $t \rightarrow 0$ och få

$$G'(x) = G'(0)G(x)$$

för alla x .

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t . Subtrahera $G(x)$ från båda sidor, dela med t och låt $t \rightarrow 0$ och få

$$G'(x) = G'(0)G(x)$$

för alla x . Detta har den unika lösningen

$$G(x) = e^{-\lambda x}$$

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t . Subtrahera $G(x)$ från båda sidor, dela med t och låt $t \rightarrow 0$ och få

$$G'(x) = G'(0)G(x)$$

för alla x . Detta har den unika lösningen

$$G(x) = e^{-\lambda x}$$

där $\lambda = -G'(0) > 0$ eftersom G är avtagande.

Vice versa: antag att $\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \mathbb{P}(X > x)$ för alla x och t . Skriv $G(x) = \mathbb{P}(X > x)$. Precis som ovan

$$\mathbb{P}(X > t + x | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > t + x)}{\mathbb{P}(X > t)}$$

och detta antogs vara lika med $\mathbb{P}(X > x)$, vilket ger

$$G(x + t) = G(t)G(x)$$

för alla x och t . Subtrahera $G(x)$ från båda sidor, dela med t och låt $t \rightarrow 0$ och få

$$G'(x) = G'(0)G(x)$$

för alla x . Detta har den unika lösningen

$$G(x) = e^{-\lambda x}$$

där $\lambda = -G'(0) > 0$ eftersom G är avtagande. Alltså är X exponentialfördelad.

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$.

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$. Då gäller

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X \in (k-1, k])$$

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$. Då gäller

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X \in (k-1, k]) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)$$

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$. Då gäller

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X \in (k-1, k]) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}\end{aligned}$$

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$. Då gäller

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X \in (k-1, k]) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})\end{aligned}$$

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$. Då gäller

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X \in (k-1, k]) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) \\ &= p(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

med $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Vi har visat att X har glömskeegenskapen *om och endast om* X är exponentialfördelad.

Exempel: Exponentialfördelning och geometrisk fördelning.

Låt $X \sim \exp(\lambda)$ och $Y = \lceil X \rceil$. Då gäller

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X \in (k-1, k]) = \mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k) \\ &= e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) \\ &= p(1-p)^{k-1}\end{aligned}$$

med $p = 1 - e^{-\lambda}$.

Kortfattat: $X \sim \exp(\lambda) \Rightarrow \lceil X \rceil \sim \text{Geo}(1 - e^{-\lambda})$. □

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende,

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) = \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x)$$

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x)\end{aligned}$$

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x}\end{aligned}$$

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}.\end{aligned}$$

□

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}.\end{aligned}$$

□

Låt $T_1, T_2, \dots, T_n$ vara oberoende och $\exp(\lambda)$ -fördelade

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}.\end{aligned}$$

□

Låt $T_1, T_2, \dots, T_n$ vara oberoende och $\exp(\lambda)$ -fördelade (obs. samma λ för alla).

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}.\end{aligned}$$

□

Låt $T_1, T_2, \dots, T_n$ vara oberoende och $\exp(\lambda)$ -fördelade (obs. samma λ för alla). Summan

$$X = \sum_{k=1}^n T_k$$

sägs vara *gammafördelad med parametrar n och λ* .

Proposition: Om $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim \exp(\lambda_2)$ och X_1 och X_2 är oberoende, så gäller $\min(X_1, X_2) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Bevis:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > x) &= \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x) \\ &= e^{-\lambda_1 x} e^{-\lambda_2 x} \\ &= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}.\end{aligned}$$

□

Låt $T_1, T_2, \dots, T_n$ vara oberoende och $\exp(\lambda)$ -fördelade (obs. samma λ för alla). Summan

$$X = \sum_{k=1}^n T_k$$

sägs vara *gammafördelad med parametrar n och λ* . Kortform $X \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer.



Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer.



Poissonprocessen.

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer. □

Poissonprocessen. Låt $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ vara en följd av tidpunkter då en viss typ av händelser (impulser) inträffar

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer. □

Poissonprocessen. Låt $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ vara en följd av tidpunkter då en viss typ av händelser (impulser) inträffar (t.ex. jordsbävningar, benbrott, mål i en fotbollsmatch, bilar som passerar på en enslig väg).

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer. □

Poissonprocessen. Låt $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ vara en följd av tidpunkter då en viss typ av händelser (impulser) inträffar (t.ex. jordbävningar, benbrott, mål i en fotbollsmatch, bilar som passerar på en enslig väg). Skriv

$$T_1 = \tau_1, \quad T_2 = \tau_2 - \tau_1, \quad T_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$$

för tidsmellanrummen mellan impulser.

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer. □

Poissonprocessen. Låt $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ vara en följd av tidpunkter då en viss typ av händelser (impulser) inträffar (t.ex. jordbävningar, benbrott, mål i en fotbollsmatch, bilar som passerar på en enslig väg). Skriv

$$T_1 = \tau_1, \quad T_2 = \tau_2 - \tau_1, \quad T_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$$

för tidsmellanrummen mellan impulser. Om $T_1, T_2, T_3, \dots$ är oberoende och $\exp(\lambda)$ -fördelade,

Proposition:

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!}.$$

Bevis: Vi återkommer. □

Poissonprocessen. Låt $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ vara en följd av tidpunkter då en viss typ av händelser (impulser) inträffar (t.ex. jordbävningar, benbrott, mål i en fotbollsmatch, bilar som passerar på en enslig väg). Skriv

$$T_1 = \tau_1, \quad T_2 = \tau_2 - \tau_1, \quad T_3 = \tau_3 - \tau_2, \dots$$

för tidsmellanrummen mellan impulser. Om $T_1, T_2, T_3, \dots$ är oberoende och $\exp(\lambda)$ -fördelade, kallas följden $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$ för en *Poissonprocess med intensitet λ* .

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Låt $X(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ = antal impulser som kommit vid tid t .

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Låt $X(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ = antal impulser som kommit vid tid t . Enlig prop ovan

$$\mathbb{P}(X(t) = n) = \mathbb{P}(\tau_n \leq t, \tau_{n+1} > t)$$

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Låt $X(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ = antal impulser som kommit vid tid t . Enlig prop ovan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) = n) &= \mathbb{P}(\tau_n \leq t, \tau_{n+1} > t) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) - \mathbb{P}(\tau_n > t)\end{aligned}$$

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Låt $X(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ = antal impulser som kommit vid tid t . Enlig prop ovan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) = n) &= \mathbb{P}(\tau_n \leq t, \tau_{n+1} > t) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) - \mathbb{P}(\tau_n > t) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Låt $X(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ = antal impulser som kommit vid tid t . Enlig prop ovan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) = n) &= \mathbb{P}(\tau_n \leq t, \tau_{n+1} > t) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) - \mathbb{P}(\tau_n > t) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Alltså: $X(t) \sim \text{Poi}(\lambda t)$.

Obs: För en Poi-process med int λ gäller $\tau_n \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Låt $X(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$ = antal impulser som kommit vid tid t . Enlig prop ovan

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X(t) = n) &= \mathbb{P}(\tau_n \leq t, \tau_{n+1} > t) \\ &= \mathbb{P}(\tau_{n+1} > t) - \mathbb{P}(\tau_n > t) \\ &= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.\end{aligned}$$

Alltså: $X(t) \sim Poi(\lambda t)$. Tack vare glömskegenskapen gäller $X(s) - X(t) \sim Poi(\lambda(s - t))$ för alla $t < s$.

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess.

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme.

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$,

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right)$$

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Betrakta två oberoende Poissonprocesser,

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Betrakta två oberoende Poissonprocesser, kalla dem P1 och P2,

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Betrakta två oberoende Poissonprocesser, kalla dem P_1 och P_2 , med intensiteter λ_1 och λ_2 .

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Betrakta två oberoende Poissonprocesser, kalla dem P_1 och P_2 , med intensiteter λ_1 och λ_2 . Då gäller enligt glömskeegenskapen vid varje tidpunkt

- Tiden T_{P_1} till nästa impuls i P_1 är $\exp(\lambda_1)$ -förd.

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Betrakta två oberoende Poissonprocesser, kalla dem P_1 och P_2 , med intensiteter λ_1 och λ_2 . Då gäller enligt glömskeegenskapen vid varje tidpunkt

- Tiden T_{P_1} till nästa impuls i P_1 är $\exp(\lambda_1)$ -förd.
- Tiden T_{P_2} till nästa impuls i P_2 är $\exp(\lambda_2)$ -förd.

Exempel: På en given lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Vad är sannolikheten att det passerar minst två bilar under en kvart?

Rimligt att anta att bilar kommer enligt en Poissonprocess. Det måste då gälla att $\lambda = 5$ bilar/timme. Vi är inträffade av $X(1/4)$, som är $Poi(5/4)$ -fördelad.

$$\mathbb{P}(X(1/4) \geq 2) = 1 - e^{-5/4} \left(\frac{(5/4)^0}{0!} + \frac{(5/4)^1}{1!} \right) \approx 0.36.$$

□

Betrakta två oberoende Poissonprocesser, kalla dem P_1 och P_2 , med intensiteter λ_1 och λ_2 . Då gäller enligt glömskeegenskapen vid varje tidpunkt

- Tiden T_{P_1} till nästa impuls i P_1 är $\exp(\lambda_1)$ -förd.
- Tiden T_{P_2} till nästa impuls i P_2 är $\exp(\lambda_2)$ -förd.
- Dessa tider är oberoende.

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2})$

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Alltså: den sammanvägda processen är en Poissonprocess med intensitet $\lambda_1 + \lambda_2$.

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Alltså: den sammanvägda processen är en Poissonprocess med intensitet $\lambda_1 + \lambda_2$.

En konsekvens: $X_1(1) + X_2(1) \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Alltså: den sammanvägda processen är en Poissonprocess med intensitet $\lambda_1 + \lambda_2$.

En konsekvens: $X_1(1) + X_2(1) \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$. M.a.o.

$Y_1 \sim Poi(\lambda_1)$, $Y_2 \sim Poi(\lambda_2)$, Y_1, Y_2 oberoende

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Alltså: den sammanvägda processen är en Poissonprocess med intensitet $\lambda_1 + \lambda_2$.

En konsekvens: $X_1(1) + X_2(1) \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$. M.a.o.

$Y_1 \sim \text{Poi}(\lambda_1)$, $Y_2 \sim \text{Poi}(\lambda_2)$, Y_1, Y_2 oberoende $\Rightarrow Y_1 + Y_2 \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$

Tiden till nästa impuls i processen som räknar impulser i både P1 och P2 är då $\min(T_{P1}, T_{P2}) \sim \exp(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Alltså: den sammanvägda processen är en Poissonprocess med intensitet $\lambda_1 + \lambda_2$.

En konsekvens: $X_1(1) + X_2(1) \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$. M.a.o.

$Y_1 \sim Poi(\lambda_1)$, $Y_2 \sim Poi(\lambda_2)$, Y_1, Y_2 oberoende $\Rightarrow Y_1 + Y_2 \sim Poi(\lambda_1 + \lambda_2)$

Direktbevis av detta:

$$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k) = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(Y_1 = j) \mathbb{P}(Y_2 = k - j)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k) &= \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(Y_1 = j) \mathbb{P}(Y_2 = k - j) \\ &= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k) &= \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(Y_1 = j) \mathbb{P}(Y_2 = k - j) \\&= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \\&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}{k!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k) &= \sum_{j=0}^k \mathbb{P}(Y_1 = j) \mathbb{P}(Y_2 = k - j) \\
&= \sum_{j=0}^k e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^j}{j!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-j}}{(k-j)!} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda_1^j \lambda_2^{k-j}}{k!} \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!}
\end{aligned}$$

där sista likheten är binomialsatsen. □

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc.

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannolikt att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannolikt att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Rimligt att anta två oberoende Poi-processer med int 5 resp 2 så bägge sorters fordon sammanvägda ger en Poi-process med int 7.

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannolikt att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Rimligt att anta två oberoende Poi-processer med int 5 resp 2 så bägge sorters fordon sammanvägda ger en Poi-process med int 7. Låt $X(t)$ vara antal fordon på tid t .

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannolikt att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Rimligt att anta två oberoende Poi-processer med int 5 resp 2 så bägge sorters fordon sammanvägda ger en Poi-process med int 7. Låt $X(t)$ vara antal fordon på tid t . $X(1/2) \sim \text{Poi}(7/2)$.

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannolikt att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Rimligt att anta två oberoende Poi-processer med int 5 resp 2 så bägge sorters fordon sammanvägda ger en Poi-process med int 7. Låt $X(t)$ vara antal fordon på tid t . $X(1/2) \sim \text{Poi}(7/2)$. Alltså

$$\mathbb{P}(X(1/2) = 3) = e^{-7/2} \frac{(7/2)^3}{3!} \approx 0.22.$$

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannol att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Rimligt att anta två oberoende Poi-processer med int 5 resp 2 så bägge sorters fordon sammanvägda ger en Poi-process med int 7. Låt $X(t)$ vara antal fordon på tid t . $X(1/2) \sim \text{Poi}(7/2)$. Alltså

$$\mathbb{P}(X(1/2) = 3) = e^{-7/2} \frac{(7/2)^3}{3!} \approx 0.22.$$

Om det passerar exakt n fordon på tid t , vad är den betingade sannol att k av dessa är mc?

Exempel: På en lågtrafikerad väg kommer i genomsnitt fem bilar per timme. Det kommer också i genomsnitt två mc. Vad är sannol att det passerar exakt tre fordon på en halvtimme?

Rimligt att anta två oberoende Poi-processer med int 5 resp 2 så bägge sorters fordon sammanvägda ger en Poi-process med int 7. Låt $X(t)$ vara antal fordon på tid t . $X(1/2) \sim \text{Poi}(7/2)$. Alltså

$$\mathbb{P}(X(1/2) = 3) = e^{-7/2} \frac{(7/2)^3}{3!} \approx 0.22.$$

Om det passerar exakt n fordon på tid t , vad är den betingade sannol att k av dessa är mc? Skriv $X_b(t)$ resp $X_m(t)$ för antal bilar resp mc.

$$\mathbb{P}(X_m(t) = k | X(t) = n) = \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k, X(t) = n)}{\mathbb{P}(X(t) = n)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_m(t) = k | X(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k, X(t) = n)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k) \mathbb{P}(X_b(t) = n - k)}{\mathbb{P}(X(t) = n)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_m(t) = k | X(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k, X(t) = n)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k) \mathbb{P}(X_b(t) = n - k)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\
 &= \frac{e^{-2t} \frac{(2t)^k}{k!} e^{-5t} \frac{(5t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-7t} \frac{(7t)^n}{n!}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_m(t) = k | X(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k, X(t) = n)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k) \mathbb{P}(X_b(t) = n - k)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\
&= \frac{e^{-2t} \frac{(2t)^k}{k!} e^{-5t} \frac{(5t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-7t} \frac{(7t)^n}{n!}} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_m(t) = k | X(t) = n) &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k, X(t) = n)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\
 &= \frac{\mathbb{P}(X_m(t) = k) \mathbb{P}(X_b(t) = n - k)}{\mathbb{P}(X(t) = n)} \\
 &= \frac{e^{-2t} \frac{(2t)^k}{k!} e^{-5t} \frac{(5t)^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-7t} \frac{(7t)^n}{n!}} \\
 &= \binom{n}{k} \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{n-k}
 \end{aligned}$$

dvs en $\text{Bin}(n, 2/7)$ -fördelning.

□