

FÖRELÄSNINGSANTECKNINGAR, RELATIVITET, MEKANIK 2 TIF375

Martin Cederwall

Inst. för Fysik, Chalmers

INNEHÅLL

1. Symmetrier i Newtonsk mekanik	2
1.1. Rotationssymmetri	2
1.2. Translationssymmetri	3
1.3. Relativitet: relativitetsprincipen, Galileitransformationen	4
1.4. Något om grupper	6
1.5. Symmetrier och bevarade storheter	6
Uppgifter till kapitel 1	7
2. Speciell relativitetsteori	9
2.1. Lorentztransformationen	9
Uppgifter till kapitel 2.1	12
2.2. Minkowskirummet	13
Uppgifter till kapitel 2.2	17
2.3. Längder och tider	17
2.3.1. Tidsdilatation	17
2.3.2. Längdkontraktion	19
Uppgifter till kapitel 2.3	20
2.4. Rörelsemängd, massa, energi	21
Uppgifter till kapitel 2.4	23
Svar till uppgifter:	25

1. SYMMETRIER I NEWTONSK MEKANIK

All Newtonsk mekanik bygger på hur partiklar rör sig under inverkan av krafter, dvs. på rörelse-ekvationen för en partikel

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}. \quad (1.1)$$

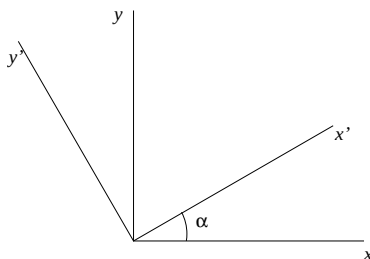
Vi skall undersöka vilka symmetrier som finns i Newtonsk mekanik.

Vad menar vi med att det finns en symmetri? Att det finns en "transformation" från de koordinater vi använder till en ny uppsättning koordinater, och att de ekvationer som styr fysiken, t.ex. ekv. (1.1), tar samma form i termer av de nya koordinaterna. Två typer av symmetrier har vi mött tidigare: rotations- och translationssymmetri.

1.1. ROTATIONSSYMMETRI

Vi tar en titt på rotationer här, framför allt för att det är intressant att jämföra med Lorentztransformationer senare. Om vi för enkelhets skull börjar med rotationer i ett plan, med koordinater (x, y) , kan rotation med en vinkel α ses som att man inför nya koordinater (x', y') :

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$



Vad är det som är speciellt med rotationer, jämfört med godtyckliga linjära transformationer

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ? \quad (1.3)$$

Så länge det $M \neq 0$ kommer ju x' och y' att vara linjärt oberoende, och fungera som koordinater (dvs. varje punkt i $\mathbb{R}^2$ har ett visst värde på (x', y') och varje värde på koordinaterna anger en unik punkt). Det som utmärker transformationerna (1.2) är att skalärprodukten $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$ är *invariant*, den tar samma form i den nya basen för $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} & a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} \\ &= (a_x \cos \alpha + a_y \sin \alpha)(b_x \cos \alpha + b_y \sin \alpha) + (-a_x \sin \alpha + a_y \cos \alpha)(-b_x \sin \alpha + b_y \cos \alpha) \quad (1.4) \\ &= a_x b_x + a_y b_y \end{aligned}$$

med användning av den trigonometriska 1:an. På matrisform kan vi skriva detta som

$$\vec{a}' \cdot \vec{b}' = \vec{a}'^t \vec{b}' (P\vec{a})^t P\vec{b} = \vec{a}'^t P^t P \vec{b} = \vec{a}'^t \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (1.5)$$

Skalärprodukten är invariant om $P^t P = I$ (enhetsmatrisen), dvs. om P är en ortogonal matris. Om man vill undvika speglingar, dvs. bevara "orienteringen" av koordinatsystemet, kräver man också att $\det P = 1$. Då är rotationerna (1.2) den mest allmänna lösningen.

Rotationer i 3 dimensioner beskrivs av ortogonala (3×3) -matriser. De är krångligare att parametrisera. Vi vet att det behövs 3 parametrar (vinklar). Man kan alltid konstruera sådana matriser genom upprepade rotationer i plan. Se t.ex. artikeln om Eulervinklar på Wikipedia.

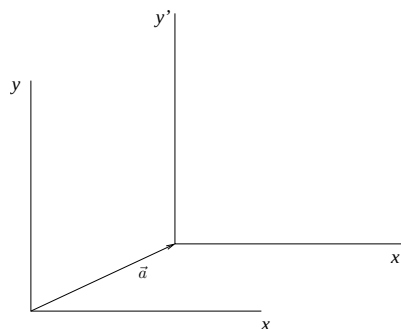
En del fysikaliska lagar, t.ex. ekv. (1.1), ges som likhet mellan vektorer. Gör vi en rotation kommer både vänster- och högerled att multipliceras med samma ortogonala matris P . Lagarna tar samma form.

1.2. TRANSLATIONSSYMMETRI

Translation betyder att man inför ett nytt koordinatsystem (på $\mathbb{R}^d$), vars axlar är likadant riktade som i det ursprungliga, men vars origo är flyttat. Observera att det nya origo inte rör sig. Då kan vi skriva transformationerna av koordinaterna

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}, \quad (1.6)$$

där $\vec{a}$ är en konstant vektor.



Förändringar i koordinaterna är invarianta under translation, $d\vec{r}' = d\vec{r}$, så t.ex. hastigheter och accelerationer ändras inte. Newtons mekanik är invariant under translationer.

Man kan kanske undra över situationer då man har en kraft som beror på läget. Då blir ju inte ekv. (1.1) densamma i ett translaterat system. Det är inget konstigt med detta. Krafterna kan t.ex. bero på att det finns saker på speciella ställen, eller på att det finns elektromagnetiska fält av något särskilt utseende, som bryter translationsinvariansen. De grundläggande ekvationerna har en symmetri, men en specifik lösning har inte den symmetrin. Blotta det faktum att en lösning till

ekv. (1.1), som beskriver en partikels läge som funktion av tiden, inte är translationsinvariant ens då $\vec{F} = 0$ visar på detta. Translationen av en lösning är en annan lösning.

Även translation i tiden är en symmetri i Newtons mekanik. Det finns heller inget som tyder på att någon grundläggande fysik är tidsberoende.

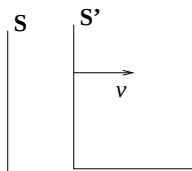
Vi kan fråga efter de mest allmänna transformationerna (på $\mathbb{R}^d$) som bevarar avstånd, dvs. $d\vec{r}' \cdot d\vec{r}' = ds^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}$. Det finns inte fler än rotationer och translationer (och kombinationer av dem). Tillsammans bildar de en grupp (se nedan) som kallas den euklidiska gruppen. Den består alltså av avståndsbevarande transformationer, *isometrier*, på $\mathbb{R}^d$.

1.3. RELATIVITET: RELATIVITETSPRINCIPEN, GALILEITRANSFORMATIONEN

Det finns ytterligare en viktig symmetri i Newtons mekanik, nämligen (Galileisk) relativitet. Eftersom accelerationen för en partikel är *andreraderivatan* av läget, förblir den densamma om man låter

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}\tag{1.7}$$

En sådan transformation (byte av koordinater) kallas en Galileitransformation. Vi läser den som att systemet $\mathbf{S}'$, med koordinaterna (x', y', z') , rör sig med hastigheten $v\hat{x}$ i förhållande till systemet $\mathbf{S}$, med koordinaterna (x, y, z) . Naturligtvis kan systemet röra sig åt vilket håll som helst, $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t$. I ekv. (1.7) har vi också skrivit ut " $t' = t$ ", för att betona att tiden är densamma i de två systemen. Tiden hos Newton är universell. Det kommer att ändras i speciell relativitetsteori.



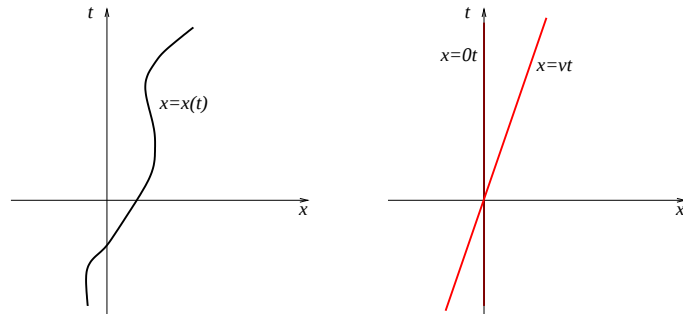
En godtycklig lösning till $m\ddot{\vec{r}} = 0$ är $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$. Med hjälp av en translation kan vi välja ett koordinatsystem så att $\vec{r}_0 = 0$, dvs. partikeln är i origo vid tiden $t = 0$ och färdas med den konstanta hastigheten $\vec{v}$. Med hjälp av en Galileitransformation kan vi välja ett system där partikeln är i vila, dess *vilosystem*.

System där Newtons första lag — en partikel som inte påverkas av krafter rör sig med konstant hastighet — gäller kallas *inertialsystem* (inertia=tröghet). Av ovanstående följer att två inertialsystem rör sig med konstant hastighet i förhållande till varandra. Deras respektive koordinater relateras med en Galileitransformation (och, förstås eventuellt rotation och translation). Alla inertialsystem är fullständigt likvärdiga.

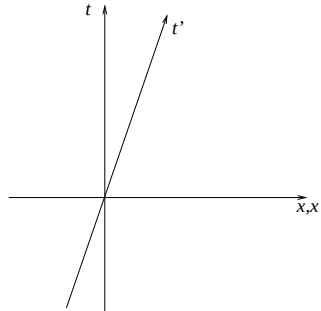
Newtons första lag kan alltså ersättas med en princip, *relativitetsprincipen*:

$$\textit{Fysikens lagar är desamma i alla inertialsystem.} \quad (1.8)$$

Vi skall rita bilder på den Galileiska rumtiden och dess koordinater, mest med tanke på att motsvarande bilder blir användbara i speciell relativitetsteori. Strunta i koordinaterna y och z , låt x -axeln vara horisontell och t -axeln vertikal. En partikel som rör sig enligt $x = x(t)$ avbildas som en världslinje. En partikel som rör sig med konstant hastighet avbildas som en linje.



I den högra bilden är två världslinjer inritade. Båda beskriver partiklar som rör sig med konstant hastighet och befinner sig i $x = 0$ vid tiden $t = 0$. Den ena är världslinjen för en partikel med hastigheten 0. Den sammanfaller med t -axeln. Den andra är linjen $x = vt$, världslinjen för en partikel med hastigheten $v\hat{x}$. I det inertialsystem $\mathbf{S}'$ som är dess vilosystem bör det alltså vara t' -axeln. Vi får följande bild som ritat axlarna i två system $\mathbf{S}$ och $\mathbf{S}'$ som relateras av en Galileitransformation enligt ekv. (1.7).



Kanske ter det sig underligt att t -axlarna inte sammanfaller, trots att $t = t'$. Det är för att (enligt ovan) t -axeln definieras som alla punkter med $x = y = z = 0$. Man kan också tänka såhär: Låt en "ortvektor" i rumtiden vara $\mathbf{V} = t\hat{t} + x\hat{x} = t'\hat{t}' + x'\hat{x}'$. Vi använder Galileitransformationen för att uttrycka de primade komponenterna, och får

$$t\hat{t} + x\hat{x} = t\hat{t}' + (x - vt)\hat{x}', \quad (1.9)$$

vilket ger $\hat{x}' = \hat{x}$, $\hat{t}' = \hat{t} + v\hat{x}$, vilket stämmer med figuren ovan. Man får vara försiktig när man tittar på rumtidsdiagram av den här typen. Det 2-dimensionella planet vi ritar är inte ett euklidiskt plan. Det enda avståndet som är väldefinierat är det rumsliga avståndet, $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Därför skall man inte försöka tolka bilden som att det är en nollskild vinkel mellan t - och t' -axlarna.

Slutligen en kommentar om kausalitet. I fysik vill man att relationen mellan orsak och verkan skall vara entydig. Det kräver att om en händelse **A** orsakar en händelse **B**, så skall $t_{\mathbf{B}} > t_{\mathbf{A}}$. Detta måste också hålla i alla inertialsystem. Eftersom tiden inte förändras i Galileitransformationen, är också uppdelningen av rumtiden i förflutet, nu och framtid relativt en händelse **A** identisk i olika system. Galileitransformationen respekterar kausalitet.

1.4. NÅGOT OM GRUPPER

Det här avsnittet kan man hoppa över.

Vi hanterar symmetrier genom att transformera koordinater (frihetsgraderna i ett system), och säga att transformationen är en symmetri om de fysikaliska lagarna tar samma form före och efter transformationen. Det finns vissa saker man naturligt önskar sig av transformationer:

- Om man gör en transformation och sedan en annan, bör det resultera i en tredje transformation.
- Att inte ändra något är en giltig transformation.
- Om man gör en transformation finns det alltid en möjlighet att göra en andra transformation som tar en tillbaka dit man började.

Dessa tre enkla önskemål svarar mot axiomen för *grupper*. En grupp G är en mängd element $g, g', \dots \in G$ som uppfyller:

- Det finns en produkt $G \times G \rightarrow G$ som vi skriver $g \circ g'$. Produkten är associativ, $g \circ (g' \circ g'') = (g \circ g') \circ g''$.
- Det finns ett enhetselement $I \in G$ sådant att $Ig = gI = g$.
- Varje element g har en unik invers g^{-1} : $gg^{-1} = I = g^{-1}g$.

Det finns diskreta grupper och kontinuerliga. En diskret grupp har ett ändligt eller ett uppräknligt oändligt antal element. Exempel: spegling i ett plan, med element som är ± 1 under multiplikation. En kontinuerlig grupp parametriseras av kontinuerliga parametrar. Exempel: rotationsgrupper.

Ett element i en rotationsgrupp är en ortogonal matris P : $PP^t = I$. Vi kan kolla axiomen. Produkten är matrisprodukten, som är associativ. Den ger en ny ortogonal matris: $PQ(PQ)^t = PQQ^tP^t = PP^t = I$. Inversen är $P^{-1} = P^t$.

1.5. SYMMETRIER OCH BEVARADE STORHETER

Detta avsnitt kan också hoppas över.

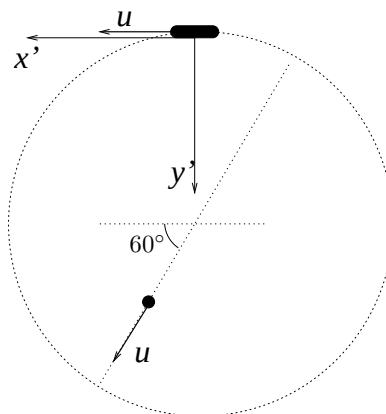
Det finns en nära relation mellan symmetrier i fysik och konserveringslagar. Noether visade i ett banbrytande papper¹ att om ett fysikaliskt system har en kontinuerlig symmetri, så finns det också en motsvarande konserverad storhet. Viktiga exempel är:

Translationssymmetri i rummet	$\longleftrightarrow$	Konservering av rörelsemängd
Translationssymmetri i tiden	$\longleftrightarrow$	Konservering av energi
Rotationssymmetri	$\longleftrightarrow$	Konservering av rörelsemängdsmoment

Just nu skall vi inte alls bevisa, eller ens argumentera för, detta. Vi skall se åtminstone en liten bit av det när vi utvecklar analytisk mekanik.

UPPGIFTER

- 1.1. En buss färdas med farten v_1 längs en gata (i x -led). En bil färdas med farten v_2 längs en tvärgata, i riktning från den gata bussen färdas på. De två gatorna bildar en rät vinkel. Bestäm ψ , vinkeln mellan de två gatorna, observerad i bussens vilosystem.
- 1.2. En buss färdas med farten v_1 längs en gata (i x -led). En bil färdas med farten v_2 längs en tvärgata, i riktning mot den gata bussen färdas på. De två gatorna bildar en rät vinkel. Bestäm θ , vinkeln mellan bussens framåtriktning och bilens färdriktning, observerad i bussens vilosystem.
- 1.3. Visa hastighetsaddition under Galileitransformationen. Om inertialsystemet $\mathbf{S}'$ rör sig relativt $\mathbf{S}$ med farten v i x -led, och en partikel har hastigheten $u\hat{x}$ respektive $u'\hat{x}'$ i de två systemen, vad är u uttryckt i termer av u' och v ?
- 1.4.



En buss kör med konstant fart u i en rondell med radien R . En hund sneddar över rondellen längs en diagonal med den konstanta hastigheten $\vec{u}$, $|\vec{u}| = u$, så att dess hastighet bildar vinkeln 60°

¹ E. Noether, "Invariante Variationsprobleme", Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1918) 235.

med bussens färdriktning vid tidpunkten $t = t_0$ när hunden befinner sig på avståndet $R/2$ från rondellens mitt (se figuren). Låt $\mathbf{S}'$, med koordinater x', y' enligt figur, vara det inertialsystem i vilket bussen är i vila vid tiden t_0 . Vad är vinkeln mellan positiva x' -axeln och hundens hastighet i systemet $\mathbf{S}'$? Vad är hundens acceleration i $\mathbf{S}'$?

- 1.5. I ett inertialsystem $\mathbf{S}$ händer följande: En buss kör med den konstanta farten $v = 14$ m/s på en rak horisontell väg. Det faller regndroppar med farten 10 m/s. Regnets vertikala hastighet är 8 m/s. Dess horisontella hastighet är riktad i bussens rörelseriktning. Bredvid vägen står vertikala telefonstolpar.
- a. I ett inertialsystem $\mathbf{S}_B$ där bussen är i vila, hur stor är vinkeln mellan bussens framåtriktning och regnets hastighet?
- b. I ett inertialsystem $\mathbf{S}_R$ där regnet är i vila, hur stor är vinkeln mellan telefonstolparna och vägen?
- 1.6. Dopplereffekt. En vågrörelse, t.ex. en ljudvåg, som rör sig i positiv x -led kan i ett inertialsystem $\mathbf{S}$ beskrivas som en funktion

$$\phi(x, t) = Ae^{\frac{i\omega}{c}(x-ct)},$$

där c är vågrörelsens hastighet och ω dess vinkelfrekvens. Använd Galileitransformationen för att härleda ett uttryck för vågrörelsens hastighet c' och vinkelfrekvens ω' i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$, som rör sig med hastigheten $v\hat{x}$ relativt $\mathbf{S}$.

2. SPECIELL RELATIVITETSTEORI

Vid slutet av 1800-talet stod det i princip klart att ljusets fart var densamma oberoende av i vilket system den mättes. Det var naturligtvis förbryllande eftersom det till synes strider mot relativitetsprincipen. Skulle man vara tvungen att överge den? Faktiskt inte. Vi skall inte gå igenom den spännande historien bakom den speciella relativitetsteorin. Det finns en utmärkt wikipediaartikel: https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_special_relativity.

Den slutliga lösningen gavs av Albert Einstein i hans artikel² från 1905. Vi skall inte direkt följa Einsteins framställning, utan siktar istället på en mer geometrisk bild, mer i linje med Hermann Minkowski, som var den som först formulerade en geometrisk framställning av den 4-dimensionella rumtiden³, det s.k. Minkowskirummet.

2.1. LORENTZTRANSFORMATIONEN

Vi skall börja med att anta att relativitetsprincipen håller i oförändrad form, och samtidigt att ljusets hastighet⁴ är densamma i alla inertialsystem. Vi har alltså de två postulaten:

- (i) *Fysikens lagar är desamma i alla inertialsystem.*
 - (ii) *Ljuset rör sig med den konstanta farten c .*
- (2.1)

Det står genast klart att Galileitransformationen inte kan gälla. Till exempel skulle vi då kunna välja ett system där en given ljusstråle är i vila. Koordinaterna (inklusive tiden) i två inertialsystem måste relateras på ett annat sätt.

Målet är alltså: Hitta nya koordinater (t', x', y', z') så att en ljusstråle går med samma fart c i $\mathbf{S}'$ som i $\mathbf{S}$. Genom att multiplicera de två ekvationerna

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2 = c^2 = \left| \frac{d\vec{r}'}{dt'} \right|^2 \quad (2.2)$$

med dt^2 resp. dt'^2 får vi

$$-(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0 = -(cdt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2. \quad (2.3)$$

Uttrycket $-(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ ser ut som ett avstånd i ett 4-dimensionellt rum med koordinater $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$, med den "lilla" skillnaden att det första termen, $-(dx^0)^2$,

² A. Einstein, "Zur Elektrodynamik bewegter Körper", Ann. Phys. **322** (1905) 891.

³ H. Minkowski. "Die Grundgleichungen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern", Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (1908) 53.

⁴ $c = 299\,792\,458$ m/s.

har minus- istället för plustecken. Precis som med rotationerna mellan två koordinater x och y i ett euklidiskt rum, ekv. (1.2), är de som bevarar det euklidiska avståndet, kan vi ställa frågan vilka transformationer mellan t och x (eller någon av de andra rumskoordinaterna) som bevarar $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Låt $y' = y$, $z' = z$, men

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} . \quad (2.4)$$

Då testar vi om "avståndet" $-(ct)^2 + x^2$ kan vara invariant:

$$-(ct')^2 + x'^2 = -(\kappa ct + \lambda x)^2 + (\mu ct + \nu x)^2 = -(\kappa^2 - \mu^2)(ct)^2 + (\nu^2 - \lambda^2)x^2 + 2(\mu\nu - \kappa\lambda)ctx . \quad (2.5)$$

Villkoren på konstanterna i ansatsen är

$$\begin{aligned} \kappa^2 - \mu^2 &= 1 , \\ \nu^2 - \lambda^2 &= 1 , \\ \mu\nu - \kappa\lambda &= 0 . \end{aligned} \quad (2.6)$$

En lösning är $\kappa = \nu = \cosh \beta$, $\lambda = \mu = -\sinh \beta$. Detta tack vare den hyperboliska 1:an $\cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta = 1$. Det är rättframt att visa att det är den mest allmänna lösningen till ekv. (2.6) modulo teckenbyten på koordinater.

Nu har vi visat att om (ct, x) och (ct', x') är relaterade enligt

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \beta & -\sinh \beta \\ -\sinh \beta & \cosh \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

så är "avståndet i kvadrat" $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2$ invariant, dvs. $-(cdt')^2 + dx'^2 = -(cdt)^2 + dx^2$. Vi antog redan att y och z inte ändras mellan de två systemen, så $-(cdt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Speciellt gäller då att om $-(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$, vilket var villkoret för att en ljusstråle skall röra sig med farten c (ekv. (2.2,2.3)), så är även $-(cdt')^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0$, och ljusstrålen går med ljushastigheten även i S' .

Notera likheten med de ortogonala transformationerna (1.2), med den avgörande skillnaden att det minustecknet i $-(cdt)^2$ gjorde att vi fick hyperboliska istället för trigonometriska funktioner.

Parametern β brukar kallas *rapiditet*. Låt oss tolka om uttrycken

$$\begin{aligned} ct' &= ct \cosh \beta - x \sinh \beta , \\ x' &= -ct \sinh \beta + x \cosh \beta \end{aligned} \quad (2.8)$$

i termer av relativ hastighet mellan systemen. Vi kan skriva om den andra ekvationen som $x' = \cosh \beta (x - c \tanh \beta t) = \cosh \beta (x - vt)$, där $v = c \tanh \beta$. Så origo i $\mathbf{S}'$, $x' = 0$, svarar mot $x = vt$. Systemet $\mathbf{S}'$ rör sig relativt systemet $\mathbf{S}$ med hastigheten v i x -led. Vi kan också skriva om $\cosh \beta$ enligt

$$\cosh \beta = \frac{\cosh \beta}{\sqrt{\cosh^2 \beta - \sinh^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \beta}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (2.9)$$

Denna funktion brukar kallas γ : $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Låter vi på så sätt $v = c \tanh \beta$ parametrisera transformationen istället för β , så blir transformationen i ekv. (2.8)

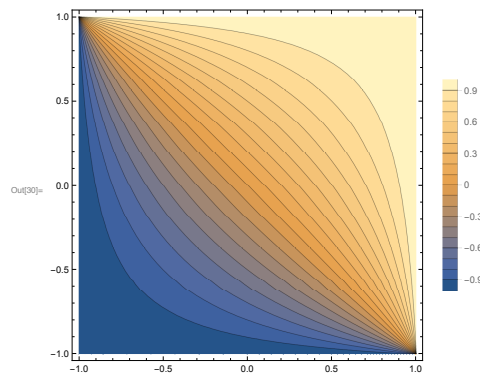
$$\begin{aligned} x' &= \gamma(v)(x - vt) , \\ t' &= \gamma(v)\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) . \end{aligned} \quad (2.10)$$

Detta är den form som Lorentztransformationen brukar presenteras på. Den gör dock sitt bästa för att dölja att det är fråga om en "rotation" i ett rum med metrik $ds^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$. Den relativa hastigheten v som parametriserar transformationen är naturlig från ett 3-dimensionellt perspektiv, men inte från ett 4-dimensionellt. Om man jämför med rotationer i ett euklidiskt rum, så motsvarar användandet av v att skriva uttrycket för (x', y') i ekv. (1.2) i termer av en "lutning" $\tan \alpha$. För $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ får då ekv. (1.2) formen

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}(x + uy) , \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}}(y - ux) . \end{aligned} \quad (2.11)$$

Inte lika geometriskt tydligt. Men notera likheten med ekv. (2.10).

Låt oss göra två Lorentztransformationer efter varandra (båda med en hastighet i x -led). Vi låter alltså $\mathbf{S}'$ röra sig relativt $\mathbf{S}$ med hastigheten v och $\mathbf{S}''$ relativt $\mathbf{S}'$ med hastigheten v' . Genom att anv"/anda (2.8) eller (2.10) två gånger finner vi att resultatet är en Lorentztransformation: $\mathbf{S}''$ rör sig relativt $\mathbf{S}$ med hastigheten $(v + v')/(1 + \frac{vv'}{c^2})$. Vi lämnar beviset till uppgift 2.2. Några nivåkurvor i denna funktion av v och v' är utritade i figuren nedan.



Lorentztransformationer kan förstås göras även i y och z -riktningarna.

Låt oss ta en jämförande titt på Galileitransformationen (1.7) och Lorentztransformationen (2.10). Den senare skall ju ersätta den förra. Uttrycken för x' är båda proportionella mot $x - vt$, och det är ju definitionen av den relativa hastigheten mellan systemen. Men dessutom multiplicerar man med en faktor $\gamma(v)$. Det kommer att göra att längder i rummet betar sig litet olika när man mäter dem i olika system. När vi tittar på uttrycket för t' ser vi att x och t blandar ihop sig även där. Vad som är tid, t.ex. vilka händelser som är samtidiga är olika i olika inertialsystem. Det finns inte längre en universell tid, som hos Galilei och Newton. En annan viktig skillnad är att den relativa hastigheten mellan två inertialsystem måste vara mindre än ljushastigheten. Parametern β , den "hyperboliska vinkeln" eller rapiditeten, kan ta godtyckliga (reella) värden, men man har alltid $-1 < \tanh \beta < 1$. Det finns alltså inget sådant som ett vilosystem för ljus (eller annat som rör sig med ljushastigheten).

Vi skall snart reda ut i detalj hur längder och tider betar sig i olika system.

Vi har pratat om en specifik sorts transformation, den som relaterar två inertialsystem, och sett den som en sorts rotation mellan t och x . Tillsammans med rotationer mellan rumskoordinater bildar de en grupp som kallas Lorentzgruppen, och ofta menar man en godtycklig sådan transformation när man säger Lorentztransformation. Dessutom är fortfarande valet av origo godtyckligt, det finns translationer i alla 4 riktningarna. Tillsammans med Lorentztransformationerna bildar de en grupp som kallas Poincarégruppen.

Poincarétransformationer är alla transformationer som inte förändrar uttrycket för "(längden)²" av en vektor $d\mathbb{X} = (dt, d\vec{r})$. Vi kan skriva

$$ds^2 = -dt^2 + d\vec{r} \cdot d\vec{r} = d\mathbb{X}^t \eta d\mathbb{X}, \quad \eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Matrisen η kallas *metriken* för Minkowskirummet. Om vi ansätter en "rotation" $\mathbb{X}' = P\mathbb{X}$, så får vi

$$ds'^2 = d\mathbb{X}'^t \eta d\mathbb{X}' = d\mathbb{X}^t P^t \eta P d\mathbb{X}. \quad (2.13)$$

ds^2 är invariant om $P^t \eta P = \eta$. Detta gäller både rotationer mellan rumskoordinater och Lorentztransformationer mellan en rums- och en tidskoordinat. Det är generaliseringen av villkoret på en ortogonal matris till Minkowskigeometri med minustecken för tiden. Dessutom är $d\mathbb{X}$ invariant under translationer $\mathbb{X}' = \mathbb{X} + \mathbb{A}$.

UPPGIFTER

- 2.1. Hur kan man veta att $c = 299\,792\,458$ m/s, exakt? Inga mätningar är väl helt exakta?
- 2.2. Härled "hastighetsaddition" under Lorentztransformationen. Använd gärna hyperboliska identiteter, om du vill. Om inertialsystemet $\mathbf{S}'$ rör sig relativt $\mathbf{S}$ med farten v i x -led, och en partikel

har hastigheten $u\hat{x}$ respektive $u'\hat{x}$ i de två systemen, vad är u uttryckt i termer av u' och v ? Visa att om $|u'| < c$ så är $|u| < c$.

- 2.3. Om vi kallar svaret i uppgift 2.2 för $u = u' \oplus v$, är det sant att $a \oplus b = b \oplus a$? Att $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$? Tolka.
- 2.4. I ett inertialsystem $\mathbf{S}$ rör sig en partikel med hastigheten $\frac{2}{3}c\hat{x}$ och en annan med hastigheten $-\frac{2}{3}c\hat{x}$. Vad är den relativa hastigheten mellan den första och den andra partikeln mätt i $\mathbf{S}$? I den andra partikelns vilosystem?
- 2.5. Uppgifterna 1.1 och 1.2, fast i speciell relativitetsteori.
- 2.6. Dopplereffekt. En våg (t.ex. elektromagnetisk) som rör sig i positiv x -led kan i ett inertialsystem $\mathbf{S}$ beskrivas som en funktion

$$\phi(x, t) = Ae^{\frac{i\omega}{c}(x-ct)},$$

där c är vågrörelsens hastighet, ljushastigheten, och ω dess vinkelfrekvens. Använd Lorentztransformationen för att härleda ett uttryck för vågrörelsens vinkelfrekvens ω' i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$, som rör sig med hastigheten $v\hat{x}$ relativt $\mathbf{S}$. Jämför med uppgift 1.6 för små $\frac{v}{c}$.

- 2.7. Visa att matrisen med hyperboliska funktioner i ekv. (2.8) är en lösning till ortogonalitetsvillkoret $P^t \eta P = \eta$, där $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Visa att om matriserna P och Q uppfyller detta villkor, så uppfylls det även av PQ .
- 2.8. När vi härledde Lorentztransformation använde vi att om ds^2 är invariant så är även villkoret $ds^2 = 0$ invariant. Visa att det finns andra transformationer (som alltså inte tillhör Lorentzgruppen) som bevarar $ds^2 = 0$, men som inte bevarar ds^2 . Tips: pröva t.ex. en uniform skalning av alla koordinater. (Klassisk elektromagnetism har också en större symmetri, s.k. konform symmetri, som innefattar skalning.)

2.2. MINKOWSKIRUMMET

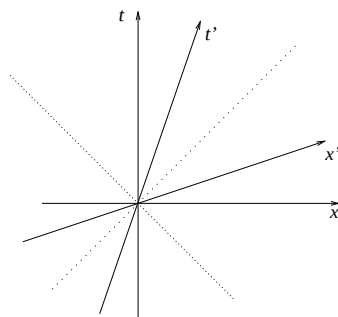
Vi har just sett att det är meningsfullt/nödvändigt att betrakta rum och tid som förenade i en rumtid. Koordinaterna är (t, x, y, z) , och det finns ett invariant “(avstånd)²”,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.14)$$

Till skillnad från det euklidiska (avståndet)², som alltid är ≥ 0 , kan ds^2 i Minkowskirummet vara positivt, negativt eller noll (det senare även då $(dt, d\vec{r}) \neq 0$). Det går alltså inte *a priori* att tolka det som “ $(ds)^2$ ”.

Från och med ekv. (2.14) sätter vi $c = 1$. Värdet på c är en konsekvens av vilka enheter vi använder, och när tiden ses som en fjärde koordinat är det naturligt att använda samma enheter för den som för de övriga koordinaterna. (Om den enheten är meter, så kallar vi alltså tiden det tar för ljuset att färdas 1 meter för 1 meter.) En fart v är då ett *dimensionslöst* tal.

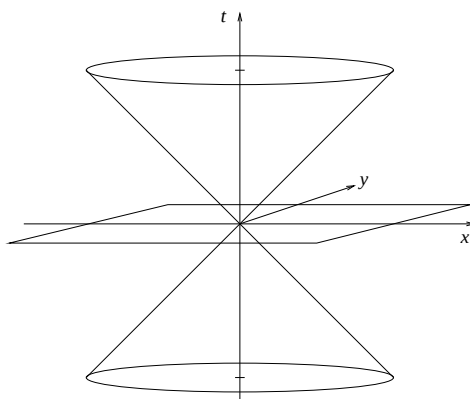
Låt oss rita en bild av rumtiden, såsom vi gjorde i samband med Galileitransformationen, med t - och x -axlar utritade. t' -axeln består av alla punkter med $x' = 0$, dvs. $x - vt = 0$, precis som vid Galileitransformationen. x' -axeln är de punkter som har $t' = 0$, dvs. $t - vx = 0$. I förhållande till t - och x -axlarna har de alltså "fällts ihop". I figuren är också utritat linjerna $x = \pm t$. En förflyttning längs en sådan riktning har $ds^2 = 0$. De är världslinjer för ljus.



Den här typen av rumtidsdiagram, eller Minkowskidiagram, är mycket användbara för att skaffa sig en bild av vad som händer i konkreta situationer. Vi kommer att använda dem för att lösa problem i speciell relativitetsteori.

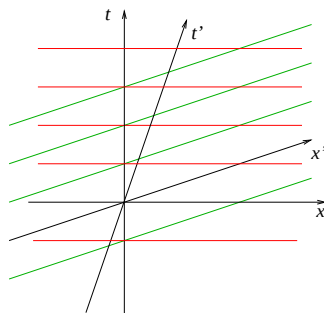
Det är viktigt att komma ihåg att man inte kan tolka diagrammet som ett euklidiskt plan. Det går inte att med ögat eller en linjal se efter vilka sträckor som är längre eller kortare, inte heller mäta vinklar med gradskiva. T.ex. är x' - och t' -axlarna precis lika ortogonala som x - och t -axlarna.

Om vi lägger till en rumsdimension med koordinat y har vi en bild av rumtiden som ser ut såhär:



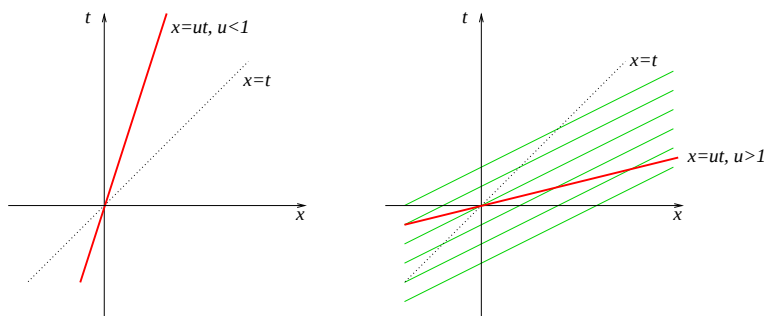
Konen som är utritad i figuren är en s.k. *ljuskon*. Tänk att en ljussignal skickas ut från origo i alla riktningar vid $t = 0$. Den kon som ligger på $t > 0$ består av de punkter i rumtiden som den når. Konen på $t < 0$ består på samma sätt av punkter som kan skicka en ljussignal som når origo vid $t = 0$. Man kan förstås rita likadana ljuskoner som utgår från andra punkter i rumtiden. Det speciella med ljuskonen är att den består av punkter med $t^2 = |\vec{r}|^2$. Den ser likadan ut i alla inertialsystem.

Det horisontella planet i figuren representerar punkter (man använder ibland ordet “händelser” för punkter i rumtiden) med $t = 0$. De är alla samtidigt i systemet $\mathbf{S}$. Det är ett begrepp som inte är samma i olika inertialsystem. Vi går tillbaka till den 2-dimensionella figuren så att det inte blir för plottrigt.



De röda linjerna (konstant t , parallella med x -axeln) består av punkter som är samtidigt i $\mathbf{S}$. De gröna linjerna (konstant t' , parallella med x' -axeln) består av punkter som är samtidigt i $\mathbf{S}'$.

Betrakta en partikel som rör sig med hastigheten $u\hat{x}$, $x = ut$ i ett inertialsystem $\mathbf{S}$. Dess världslinje är en rät linje. De två figurerna nedan visar situationerna där $u < 1$ (kom ihåg att $c = 1$!) respektive $u > 1$.



Låt oss beskriva rörelsen i ett annat inertialsystem, $\mathbf{S}'$ som rör sig med hastigheten v relativt $\mathbf{S}$. Vi använder ekv. (2.10), $x' = \gamma(v)(x - vt)$, $t' = \gamma(v)(t - vx)$. Insättning av $x = ut$ i den andra ekvationen ger

$$t' = \gamma(v)(1 - uv)t. \quad (2.15)$$

Kom ihåg att $|v| < 1$. Om $u \leq 1$ är $1 - uv > 0$, både t och t' löper i positiv riktning längs världslinjen. Om däremot $u > 1$ finns det inertialsystem $\mathbf{S}'$ sådana att $1 - uv < 0$. Detta händer för $v > \frac{1}{u}$ ($v > \frac{c^2}{u}$ om vi stoppar in ljushastigheten igen). I ett sådant system $\mathbf{S}'$ rör sig partikeln bakåt i tiden t' när den rör sig framåt i t . Det här är illustrerat i den högra figuren ovan, där simultanslinjerna är inritade, och man kan följa deras skärningar med världslinjen bakåt i t' .

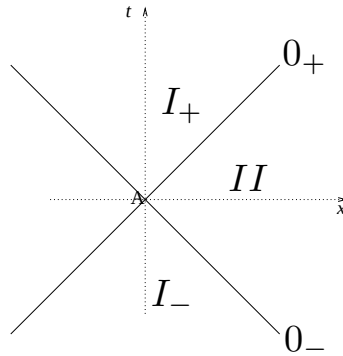
Detta är katastrofalt. Vad vi har visat är att om vi tillåter något (partikeln ovan) att röra sig med en hastighet som är större än ljushastigheten, så finns det inertialsystem där det färdas bakåt i tiden. En grundläggande egenskap hos varje rimlig fysikalisk modell är kausalitet. En händelse $\mathbf{A}$

kan vara orsak till en händelse **B** endast om $t_{\mathbf{B}} > t_{\mathbf{A}}$. Vad vi har sett här är att vi, för att rädda kausalitet, bör kräva det i alla inertialsystem, och att det betyder att vi inte tillåter saker att färdas med högre hastighet än ljusets.

Låt $\mathbb{X}_{\mathbf{A}} = (t_{\mathbf{A}}, \vec{r}_{\mathbf{A}})$ och $\mathbb{X}_{\mathbf{B}} = (t_{\mathbf{B}}, \vec{r}_{\mathbf{B}})$ vara koordinaterna för två händelser **A** och **B** (punkter i Minkowskirummet). Vektorn från **A** till **B** är $\Delta\mathbb{X} = \mathbb{X}_{\mathbf{B}} - \mathbb{X}_{\mathbf{A}}$. Dess “(längd)²” är

$$\begin{aligned} (\Delta\mathbb{X})^2 &= -(\Delta\mathbb{X}^0)^2 + (\Delta\mathbb{X}^1)^2 + (\Delta\mathbb{X}^2)^2 + (\Delta\mathbb{X}^3)^2 \\ &= -(t_{\mathbf{B}} - t_{\mathbf{A}})^2 + (x_{\mathbf{B}} - x_{\mathbf{A}})^2 + (y_{\mathbf{B}} - y_{\mathbf{A}})^2 + (z_{\mathbf{B}} - z_{\mathbf{A}})^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notera att denna “längd” är invariant under Lorentztransformationer (och rotationer i rummet). Den är en geometrisk invariant, som karaktäriserar den 4-dimensionella vektorn $\Delta\mathbb{X}$. Speciellt dess tecken har betydelse. Vi kan dela in i olika klasser, dvs. givet en punkt **A**, som vi kan tänka som origo i bilden ovan, finns det olika klasser av punkter **B**.



I_+ : $(\Delta\mathbb{X})^2 < 0$, $\Delta t > 0$. **B** ligger inom **A**:s framtida ljuskon. **A** kan skicka signaler till **B**.

I_- : $(\Delta\mathbb{X})^2 < 0$, $\Delta t < 0$. **B** ligger inom **A**:s förflutna ljuskon. **B** kan skicka signaler till **A**.

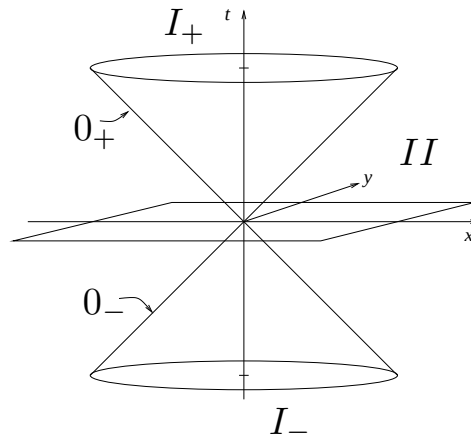
II : $(\Delta\mathbb{X})^2 > 0$. **B** ligger utanför **A**:s ljuskon. Inga signaler kan skickas mellan **A** och **B**. De är inte kausalt förbundna med varandra.

Dessutom har vi gränsfallen:

0_+ : $(\Delta\mathbb{X})^2 = 0$, $\Delta t > 0$. **B** ligger på **A**:s framtida ljuskon. **A** kan skicka ljussignaler till **B**.

0_- : $(\Delta\mathbb{X})^2 = 0$, $\Delta t < 0$. **B** ligger på **A**:s förflutna ljuskon. **B** kan skicka ljussignaler till **A**.

Med en rumsriktning till utritad ser bilden ut såhär.



Vi kallar $\Delta\mathbb{X}$ för *rumslig* om $(\Delta\mathbb{X})^2 > 0$, *ljuslik* om $(\Delta\mathbb{X})^2 = 0$ och *tidslik* om $(\Delta\mathbb{X})^2 < 0$. Det går alltid att hitta ett inertialsystem där en tidslik vektor är $\Delta\mathbb{X} = (\Delta t, \vec{0})$, och det går alltid att hitta ett inertialsystem sådant att en rumslig vektor är $\Delta\mathbb{X} = (0, \Delta\vec{r})$.

UPPGIFTER

- 2.9. Bevisa (eller argumentera tillräckligt för att inse) att:
- Det går alltid att hitta ett inertialsystem där en tidslik vektor är $\Delta\mathbb{X} = (\Delta t, \vec{0})$.
 - Det går alltid att hitta ett inertialsystem sådant att en rumslig vektor är $\Delta\mathbb{X} = (0, \Delta\vec{r})$.

2.3. LÄNGDER OCH TIDER

Från Newtonsk/Galileisk relativitet är vi vana vid att tiden är universell, och att kroppars utsträckning inte beror på i vilket inertialsystem de observeras. Det är inte längre sant. Vi skall nu ställa, och svara på, frågorna:

Hur relateras tid i olika inertialsystem?

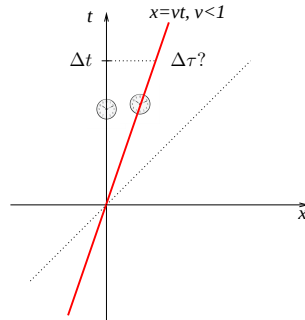
Hur långt är något i olika inertialsystem?

Hur långt ser något ut?

2.3.1. TIDSDILATATION

Vi börjar med tiden, och ställer frågan:

En "person" färdas med konstant hastighet v (mätt i ett inertialsystem $\mathbf{S}$). Efter en tid Δt , hur lång tid $\Delta\tau$ har gått för personen som rör sig? Vi konkret tänka oss att det är en klocka som rör sig. Vi frågar då helt enkelt vad klockan visar.



Nu kan vi observera att i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$ som följer med klockan, dess *vilosystem*, har klockan inte alls flyttat på sig, det har bara gått en tid $\Delta t'$ (som är den sökta tiden $\Delta \tau$). Vi kallar τ för *egentid* (eng.: proper time). Lorentztransformationen säger då att $\Delta t' = \gamma(v)(\Delta t - v\Delta x) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(\Delta t - v^2\Delta t) = \sqrt{1-v^2}\Delta t$. Klockan visar alltså

$$\Delta \tau = \frac{1}{\gamma(v)} \Delta t = \sqrt{1-v^2} \Delta t. \quad (2.17)$$

Detta kallas *tidsdilatation*. Det har gått kortare tid på klockan som rör sig än på en klocka som inte rör sig.

Ett ännu mer direkt (men ekvivalent) sätt att härleda uttrycket för tidsdilatation är att observera att i en partikels momentana vilosystem är $d\mathbb{X}' = (dt', \vec{0}) = (d\tau, \vec{0})$, och alltså $ds^2 = -d\tau^2$ (kom ihåg här att ds^2 inte betyder kvadraten av något, men $d\tau^2$ är kvadraten av $d\tau$), så att $d\tau = \sqrt{-ds^2}$. “Avståndet” ds^2 är invariant och kan räknas ut i vilket inertialsystem som helst. I $\mathbf{S}$ får man $ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -(1-v^2)dt^2$. Därför är $d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{1-v^2}dt$.

En sak behöver redas ut här. Vi skulle ju lika gärna kunna betrakta hela skeendet i $\mathbf{S}'$. Då är det klockan som tidigare var i vila som rör sig. Samma argument skulle leda till resultatet att tiden går långsammare för klockan som rör sig, men rollen är nu den omvända. Båda resultaten är korrekta, tidsdilatation är ömsesidig. Nyckeln till att förstå att det inte ligger någon motsägelse i detta är att det finns en asymmetri i själva frågan. Vi frågar (se figuren ovan) vad klockan som rör sig visar *samtidigt* som klockan i vila visar Δt . “Samtidigt som” betyder här “samtidigt i systemet $\mathbf{S}$ ”. Hade vi istället använt samtidigheten i $\mathbf{S}'$ hade resultatet blivit det omvända. Det är inget fel på någon av frågorna, men de är inte samma fråga.

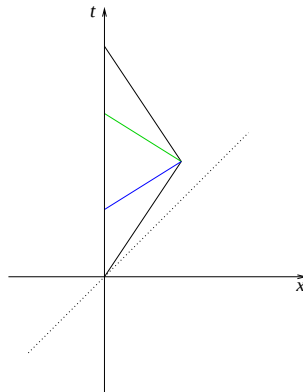
Exempel: “tvillingparadoxen”

Två tvillingar, Kim och Alex, bor på jorden. En dag, när tvillingarna är 30 år gamla, stiger Alex ombord på en rymdraket och färdas (efter en tids acceleration som är försumbar i sammanhanget) med hastigheten $4c/5$ till en planet 12 ljusår bort, och sedan tillbaka till jorden. Resan tar alltså inalles 30 år, och Kim, som stannade på jorden, är 60 år gammal när Alex återvänder. Hur gammal är då Alex?

Eftersom Alex (i stort sett hela tiden) har rört sig med farten $v = 4c/5$ och $\gamma(v) = \frac{5}{3}$, säger tidsdilationsuttrycket (2.17) att den tid som förflutit för Alex (enligt hans klocka, och enligt de fysikaliska och biologiska processerna i hans kropp) är $\frac{3}{5} \times 30 \text{ år} = 18 \text{ år}$. Alex är 48 år gammal vid hemkomsten, 12 år yngre än sin tvilling.

Detta resonemang är korrekt. Man kan dock formulera en invändning: När Alex färdas i sin rymdraket, kan vi väl lika gärna betrakta det som att Kim, och jorden, rör sig relativt raketen, som är i vila? Isåfall skulle ju effekten vara den omvända, att Kim var yngre än Alex vid hemkomsten? Detta lilla tankemisstag går under namnet "tvillingparadoxen".

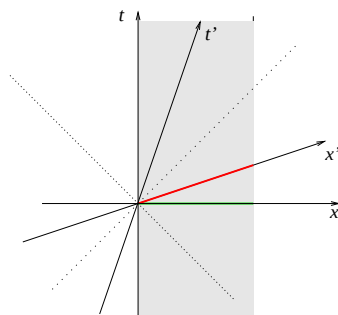
Vi svarar på frågan genom att rita hela förloppet i ett rumtidsdiagram. Vi ritar det i jordens inertialsystem. Figuren visar hur tvillingen Alex reser ut och tillbaka. Tvillingen Kim stannar på jorden (t -axeln). Hade vi använt Alex samtidighetsbegrepp för att undersöka tidsdilatationen hade det blivit konstigt. Omedelbart före stoppet på den fjärran planeten ges den samtidigheten av den blå linjen, men omedelbart efter stoppet ges den av den gröna linjen. Den tid som man jämför med är inte alls den tid som förflutit på jorden, tidsintervallet längs t -axeln mellan den blå och den gröna linjen har ignorerats.



2.3.2. LÄNGDKONTRAKTION

Vi skall undersöka hur längder förhåller sig i olika inertialsystem. Tag det enklaste utsträckta objektet, en smal stav, och låt dess längd i dess vilosystem vara L . Vad är dess längd i ett inertialsystem där den rör sig med farten v ? Inför ett inertialsystem $\mathbf{S}'$ som (som vanligt) rör sig med farten v relativt stavens vilosystem $\mathbf{S}$. Då rör sig förstås staven relativt $\mathbf{S}'$ med farten v , i motsatt riktning.

Motsvarigheten till en världslinje för en partikel är en "världsytta" för staven, den skuggade ytan i figuren. När vi undersöker stavens längd tittar vi på den vid en viss tidpunkt. I vilosystemet $\mathbf{S}$ är det den gröna linjen som representerar staven vid en viss tid t ($t = 0$). I $\mathbf{S}'$ måste vi fråga hur staven ser ut vid en viss tid t' . Detta är den röda linjen. Intressant nog menar man inte samma sak med en stav. En stav i ett inertialsystem är sammansatt av delar av staven vid olika tider i ett annat inertialsystem, p.g.a. de åtskilda samtidighetsbegreppen.



Längden av staven i S' är värdet av x' i den högra änden av den röda sträckan. Vi använder att $x = L$ och $t' = 0$. Lorentztransformationen ger $t' = \gamma(v)(t - vL)$, så denna punkt har $t = vL$. Sedan får vi $L' = x' = \gamma(v)(L - vt) = \gamma(v)(1 - v^2)L = \frac{L}{\gamma(v)}$.

Längden av en stav med (vilo-)längd L som rör sig med farten v i sin längdriktning är alltså

$$L' = \frac{L}{\gamma(v)} = \sqrt{1 - v^2}L. \quad (2.18)$$

Notera att den röda linjen är *kortare* än den gröna, trots att den kanske “ser längre ut” i figuren. Ett tydligt tecken på att man inte får använda sina euklidiska linjaler. När man vänjer sig att läsa diagrammen ser man också direkt att den röda sträckan är kortare, eftersom vektorn längs den kan skrivas $(a, L\hat{x})$ och a^2 kommer med minustecken i “Pythagoras sats”.

Utsträckning i riktningar vinkelräta mot rörelseriktningen påverkas inte alls.

Liksom med tidsdilatationen kan vi göra en mer direkt geometrisk härledning av längdkontraktionen genom att använda invariansen av ds^2 . En rent rumslig vektor $d\mathbf{X} = (0, dx, 0, 0)$ har $ds^2 = dx^2$, dvs. $dx = \sqrt{ds^2}$. x' -axeln har $dt = vdx$. Invariansen av ds^2 ger för en vektor längs x' -axeln: $ds^2 = dx'^2 = -dt^2 + dx^2 = (1 - v^2)dx^2$, och alltså $dx' = \sqrt{1 - v^2}dx$.

UPPGIFTER

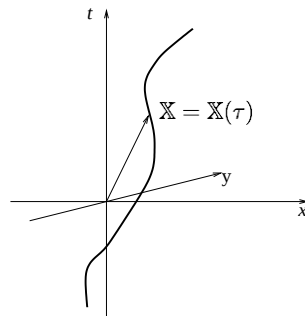
- 2.10. En klassisk paradox i speciell relativitetsteori är den s.k. “stavhopparparadoxen”. En människa (“stavhopparen”) som bär en horisontell stav springer in i en lada. Staven är längre än ladan, så den skall inte få plats. Men staven förkortas på grund av längdkontraktionen, så om stavhopparen springer tillräckligt fort kommer staven att rymmas i ladan. Vilket av påståendena är riktigt?
- A. Längdkontraktionen är en optisk illusion, och staven får lika litet plats i rörelse som i vila.
 - B. Från stavhopparens perspektiv kan hela staven inte rymmas samtidigt i ladan, men från ladans perspektiv kan den det.
 - C. Staven längdkontraheras visserligen, men ladan längdkontraheras lika mycket, så staven får fortfarande inte plats.
 - D. Inget av påståendena A, B eller C.
- Använd ett rumtidsdiagram.

- 2.11. En rymdfarkost med vilolängden 100 m färdas med farten $0.60c$ genom ett hål i en asteroid. Asteroidens diameter, dvs. hålets längd, är också 100 m. För en observatör i vila på asteroiden, hur långt in i asteroiden befinner sig rymdskeppets bakre ände exakt samtidigt som den främre änden kommer ut på asteroidens andra sida?
- 2.12. När vi räknar ut längdkontraktionen är det inte samma sak som hur en stav faktiskt “ser ut”, eftersom den inte tar hänsyn till att ljussignaler från olika delar av staven har olika lång väg att färdas till en observatörs ögon. Vad är den “skenbara” längden hos en stav som rör sig med farten v rakt mot eller rakt ifrån en observatör i vila (svaren behöver inte vara lika)? Dvs. vad är skillnaden i x -koordinaterna (mätt i observatörens system för utsändandet av ljusstrålar från stavens båda ändar som når observatören samtidigt? Ledning: Rita ett rumtidsdiagram. Var är den “skenbara” staven?

2.4. RÖRELSEMÄNGD, MASSA, ENERGI

Vi går tillbaka till bilden av en partikel som rör sig i rummet. Partikeln vid alla tider är en världslinje. Vi kan skriva $\vec{r} = \vec{r}(t)$, som säger att rumskoordinaterna (ortvektorn) är funktioner av tiden. Men det är en beskrivning som “bryter isär” Minkowskirummet på ett sätt som vi gärna skulle vilja undvika, eftersom vad vi menar med rums- och tidskoordinater är olika i olika inertialsystem. Det verkar mer lovande att spara hela vektorn $\mathbb{X} = (t, \vec{r})$, och införa någon parametrisering av världslinjen $\mathbb{X} = \mathbb{X}(\tau)$. Vilken som helst parametrisering går förstås bra, exempelvis kan man välja τ att vara tiden i något inertialsystem.

Ett val av parameter utskiljer sig som mer naturligt, och det är att välja en parameter τ sådan att $d\tau = \sqrt{-ds^2}$. Eftersom $ds^2 = -dt^2 + |d\vec{r}|^2$ i alla inertialsystem är $d\tau$ invariant. τ är egentiden längs världslinjen. Nu har vi möjlighet att derivera läget och få en hastighet. Vi “dividerar” alltså den 4-dimensionella lägesförändringen $d\mathbb{X}$ med $d\tau$. Eftersom $d\tau$ är invariant blir resultatet en vektor (i betydelsen att den beter sig som en vektor under rotationer och Lorentztransformationer). Se uppg. (2.13).



Den 4-dimensionella hastighetsvektorn är

$$\mathbb{V} = \frac{d\mathbb{X}}{d\tau}. \quad (2.19)$$

Av detta följer genast att $\mathbb{V}^2 = \frac{ds^2}{(d\tau)^2} = -1$. Vi kan se detta, kanske mindre abstrakt, även i en uppdelning i tids- och rumskomponenter. Tidsdilatationen säger att $d\tau = \frac{dt}{\gamma(v)}$, där $v = |\vec{v}|$ och $\vec{v}$ är partikelns momentana hastighet. Så vi kan skriva

$$\mathbb{V} = \gamma(v) \frac{d\mathbb{X}}{dt} = \gamma(v)(1, \vec{v}) . \quad (2.20)$$

Skalarprodukten av denna vektor med sig själv är

$$\mathbb{V}^2 = (\gamma(v))^2(-1 + v^2) = -1 . \quad (2.21)$$

En enkel tolkning av denna 4-dimensionella hastighetsvektor är att den är en normerad tangentvektor längs världslinjen. Eftersom den pekar i en tidslik riktning måste den normeras så att "(längden)²" är -1 .

Analogin till denna parametrisering av en partikels världslinje för en kurva i ett euklidiskt rum är att använda båglängden s som parameter. Då blir $|\frac{d\vec{r}}{ds}| = 1$.

Vi kan bilda en rörelsemängd genom att multiplicera med en partikels massa:

$$\mathbb{P} = m\mathbb{V} = m\gamma(v)(1, \vec{v}) . \quad (2.22)$$

Rörelsemängden för en partikel med massan m kvadrerar då till $\mathbb{P}^2 = -m^2$. Detta är den rörelsemängd som är bevarad i fysikaliska processer. Rumskomponenterna av rörelsemängden är

$$\vec{p} = m\gamma(v)v . \quad (2.23)$$

För små v (mycket mindre är ljushastigheten 1) överensstämmer uttrycket med det Newtonska.

Vad betyder då tidskomponenten av $\mathbb{P}$, $p^0 = m\gamma(v)$? Låt oss undersöka för små hastigheter:

$$p^0 = m\gamma(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = m + \frac{1}{2}mv^2 + O(v^4) . \quad (2.24)$$

Den första termen är en konstant. Den andra termen är uttrycket för partikelns kinetiska energi i Newtons mekanik. Det ligger nära till hands, särskilt då $\mathbb{P}$ är bevarad (p.g.a. translationssymmetri), att tolka p^0 som E , partikelns energi. Men då har man också sagt att den första termen, m , är den energi en partikel har när den är i vila. Vi ser att den totala energin går mot ∞ då $v \rightarrow 1^-$. Det går inte att accelerera en partikel till ljushastigheten genom att tillföra energi.

Sätter vi tillbaka c i uttrycken får vi $E = mc^2\gamma(v) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$. Härav den berömda formeln " $E = mc^2$ " för en partikel i vila⁵. Hur viktig är den första termen i energin? Svaret bör vara att den är oviktig om den aldrig kan omvandlas till andra energiformer, och viktig om den kan. Som alla vet kan den omvandlas. Hos Newton är massa oförstörbar. Hos Einstein är den energi, som i fysikaliska processer kan omvandlas.

Det vi har beskrivit ovan är rörelsemängd (inklusive energi) för en partikel med massan m . Så länge $m \neq 0$ är rörelsemängden tidslik, och $\mathbb{P}^2 = -m^2$. Vi såg tidigare att kausalitet även tillåter rörelse i en ljuslik riktning, dvs. med ljushastigheten. Och ljus rör ju sig så. I det fallet skulle vi alltså ha $m = 0$, partikeln saknar massa. Då kan inte längre uttrycket (2.22) gälla, det ger " $0 \cdot \infty$ ". Fotoner, ljuspartiklar, rör sig med ljushastigheten och har massan 0. För att ange rörelsemängden hos en foton får man skriva $\mathbb{P} = \epsilon(1, \vec{n})$, där ϵ är dess energi och $\vec{n}$ en enhetsvektor i dess rörelseriktning. Energin är relaterad till fotonens vinkelfrekvens enligt $\epsilon = \hbar\omega$, men det går utanför denna kurs.

UPPGIFTER

- 2.13. Visa att multiplikation av en 3-dimensionell vektor med ett tal som inte är rotationsinvariant inte resulterar i en vektor, t.ex. att $\frac{d\vec{r}}{dx}$ inte är en vektor. Samma i 4 dimensioner (Minkowskirummet).
- 2.14. Hur snabbt behöver en elektron röra sig för att dess kinetiska energi skall vara lika stor som dess viloenenergi?
- 2.15. Myoner (partiklar med liknande egenskaper som elektroner fast tyngre, massan är $m \approx 105.7$ MeV/ c^2) bildas när kosmisk strålning träffar den övre atmosfären. Antag att myonerna bildas på höjden 15 km. Halveringstiden för myoner är $T_{1/2} \approx 2.2 \mu s$. Hur hög energi skall en myon minst ha för att den skall hinna vertikalt ned till jordytan på tiden $T_{1/2}$?
- 2.16. Två kroppar, båda med vilomassan m , kolliderar rakt och fullständigt inelastiskt. Om de före kollisionen har hastigheterna $v\hat{x}$ och $-v\hat{x}$, vad blir vilomassan för den sammanslagna kroppen?
- 2.17. Två kroppar, båda med vilomassan m , kolliderar rakt och fullständigt inelastiskt. Om de före kollisionen har relativ hastighet u , vad blir vilomassan för den sammanslagna kroppen? (Tips: skriv ned bevarande av rörelsemängd, och eliminera den nya hastigheten m.h.a. den hyperboliska 1:an.)
- 2.18. En foton med energin ϵ absorberas av en partikel i vila med vilomassa m . Vad blir den nya vilomassan M ?
- 2.19. Är ett varmt föremål trögare att accelerera än ett kallt?
- 2.20. Att fundera på (men svårt att svara på utan att veta mer om gravitation): Om man ställer en kokplatta med en kastrull med vatten på en våg, visar vågen mer när vattnet värms upp?

⁵ En liten varning: En del texter, särskilt äldre, kallar m_0 , det vi kallar m , för "vilomassa", och $m = m_0\gamma(v)$ för "relativistisk massa", i värsta fall "massa". Då gäller $E = mc^2$ för partiklar i rörelse. Men det är inte mycket mening med att införa en ny term (massa) för en annan (energi).

2.21. På CERN:s websida kunde man för ett antal år sedan läsa följande:



Överensstämmer uppgiften om protonernas energi (7 TeV) med uppgiften om deras fart (0.9999c)?

SVAR TILL UPPGIFTER:

- 1.1. $\psi = 90^\circ$.
- 1.2. $\tan \theta = -\frac{v_2}{v_1}$, θ i andra kvadranten.
- 1.3. $u = u' + v$.
- 1.4. Kalla det inertialsystem i vilket uppgiften är formuleras för $\mathbf{S}$. Hundens hastighet $\vec{u}$ i $\mathbf{S}$ och $\vec{u}'$ i $\mathbf{S}'$ är relaterade enligt $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$, där $\vec{v}$ är hastigheten för $\mathbf{S}'$ relativt $\mathbf{S}$. Alltså, $\vec{u}' = u(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - (u, 0) = u(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Vinkeln mot $\hat{x}'$ är 120° . Accelerationen är 0.
- 1.5. Enligt Galileitransformationen ges koordinaterna $\vec{r}'$ i ett inertialsystem $\mathbf{S}'$ av $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, där $\vec{u}$ är hastigheten för $\mathbf{S}'$ i $\mathbf{S}$. Derivation ger relationen mellan hastigheter: $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$. Låt $\hat{x}$ vara riktad "framåt" och $\hat{y}$ uppåt.
- a. Regnet har hastigheten $\vec{v} = (6\hat{x} - 8\hat{y})$ m/s. Med $\vec{u} = 14\hat{x}$ m/s fås regnets hastighet i buss-systemet som $\vec{v}_{\mathbf{B}} = (-8\hat{x} - 8\hat{y})$ m/s, som bildar vinkeln $\frac{3\pi}{4}$ med $\hat{x}$.
- b. Vid en given tid t är (med beteckningar ovan) $\hat{x}' = \hat{x}$, $\hat{y}' = \hat{y}$. Vinkeln är $\frac{\pi}{2}$.
- 1.6. $c' = c - v$, $\omega' = (1 - \frac{v}{c})\omega$.
- 2.2. $u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}$.
- 2.3. Ja. Ja.
- 2.4. $\frac{4}{3}c$ resp. $\frac{12}{13}c$
- 2.5. $\psi = 90^\circ$ resp. $\tan \theta = -\frac{v_2}{\gamma(v_1)v_1}$, θ i andra kvadranten.
- 2.6. $\omega' = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}\omega$.
- 2.10. B
- 2.11. 20 m.
- 2.14. $\frac{\sqrt{3}}{2}c$.
- 2.15. 2.4 GeV
- 2.16. $2\gamma(v)m$.
- 2.17. $2m\sqrt{\frac{1+\gamma(u)}{2}}$.
- 2.18. $M = m\sqrt{1 + \frac{2\epsilon}{m}}$.
- 2.19. Ja.
- 2.20. Ja.
- 2.21. Nej.