

Lösningssförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375

Fredagen 19 augusti 2022

Examinator: Martin Cederwall

Lösningssförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. I utgångsläget är den kinetiska energin $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}ma^2(\frac{v}{a})^2 = \frac{7}{10}mv^2$ och den potentiella energin mga , om vi låter nollpunkten vara $z = 0$. Låt kulan vara i momentan vila med kontaktpunkten på $x = x_0$. Masscentrum är då på höjden $h = f(x_0) + a \cos \alpha$, där α är vinkeln mellan vertikalen och radien till kontaktpunkten. Vi har $\tan \alpha = f'(x_0)$, och alltså $h = f(x_0) + \frac{a}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}}$. Energikonservering ger

$$mg \left(f(x_0) + \frac{a}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}} \right) = \frac{7}{10}mv^2 + mga ,$$

dvs.

$$v^2 = \frac{10}{7}ga \left(\frac{f(x_0)}{a} + \frac{1}{\sqrt{1+f'(x_0)^2}} - 1 \right) ,$$

vilket ger den minsta nödvändiga utgångsfarten.

2. Centrifugalkraften "struntar" vi i; detta är det rätta att göra eftersom den lokala vertikalen inkluderar effekten av gravitation och centrifugalkraft. Om massan bara faller rakt nedan utan hänsyn till Corioliskraften, får man $z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2$, $\dot{z} = -gt$. Corioliskraften är

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\Omega} \times \vec{v} = -2m\dot{z}\Omega \cos \theta \hat{x} ,$$

där $\vec{\Omega}$ är jordrotationen och $\hat{x}$ är riktad österut. Detta leder till $\ddot{x} = 2gt\Omega \cos \theta$, som integreras till $x(t) = \frac{1}{3}gt^3\Omega \cos \theta$. Massan når marken vid $t = t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, vilket ger

$$\delta = x(t_0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{h^3}{g}} \Omega \cos \theta .$$

I beräkning har vi struntat i att hastigheten i x -led i sin tur ger upphov till en Corioliskraft. Denna kommer dock att vara proportionell mot Ω^2 , och kan försummas. Mer precist: vi kan skriva svaret som $\delta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\epsilon h \cos \theta$, där $\epsilon = \sqrt{\frac{h}{g}}\Omega$ är en liten (enligt förutsättningarna, och i realistiska situationer) dimensionslös parameter. Det vi har gjort är att räkna endast till första ordningen i ϵ .

3. Det sfäriska skalet har tröghetsmatrisen $I_{\text{sfär}} = \frac{2}{3}ma^2\mathbb{1}$. Välj ett koordinatsystem där x -axeln pekar åt höger i bilden och y uppåt. Vardera pinnen har en tröghetsmatris, som kan beräknas genom direkt integration, eller m.h.a. Steiners sats enligt

$$I_{\text{stav}} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} + ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

Den totala tröghetsmatrisen är alltså

$$I = I_{\text{sphär}} + 2I_{\text{stav}} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{8}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

En huvudtröghetsaxel är uppenbarligen z -axeln, med huvudtröghetsmomentet $\frac{10}{3}ma^2$. Det övre vänstra hörnet i I diagonaliseras med standardmetod. Huvudtröghetsmomenten (egenvärdena) är $(2 \pm \frac{\sqrt{13}}{3})ma^2$, med huvudtröghetsaxlar (egenvektorer) riktade längs $(1, -\frac{2+\sqrt{13}}{3}, 0)$ resp. $(\frac{2+\sqrt{13}}{3}, 1, 0)$. Om man ritat ut dem ser man att den senare vektorn, som svarar mot det lägre egenvärdet, går genom båda stavarna, så det verkar rimligt (massan närmare axeln). Ytterligare kontroll: axlarna är $\perp$.

4. Det finns förstås många sätt att välja koordinaterna, som ju skall beskriva en partikels läge i $\mathbb{R}^3$. Det frågas efter en konserverad storhet. Eftersom momentet från tyngkraften (m.a.p. den fixa punkten) inte har någon vertikal komponent, är rörelsemängdsmomentet runt z -axeln bevarat. Det kan vara lämpligt att välja en av koordinaterna som φ (i sfäriska eller cylindriska koordinater). Eftersom fjäderns längd är enklare i sfäriska koordinater tar vi dem. Då får vi $L = T - V$, där $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$ och $V = \frac{1}{2}k(r - \ell)^2 - mgr\cos\theta$. Lagranges ekvationer blir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\dot{\theta}^2 - m\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta + k(r - \ell) - mg\cos\theta, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) - mr^2\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 + mgr\sin\theta, \\ 0 &= \frac{d}{dt}(mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Den tredje ekvationen uttrycker att $L_z = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$ är konstant (bestäms av begynnelsevillkor), så $\dot{\varphi} = \frac{L_z}{mr^2\sin^2\theta}$ kan sättas in de första två ekvationerna.

5. En möjlighet, som visar de två påståendena på ett symmetriskt sätt, är att rita förloppet sett från ett system där farkosten och tunneln rör sig med lika stora och motriktade hastigheter. (De numeriska värdena är oväsentliga.) Kalla detta system $\mathbf{S}$, farkostens vilosystem $\mathbf{S}'$ och tunnelns $\mathbf{S}''$. Farkosten och tunneln har samma längd i $\mathbf{S}$. Händelsen $\mathbf{A}$ är att farkostens bakända åker in i tunneln, och $\mathbf{B}$ att dess framända lämnar tunneln. De är samtidigt i $\mathbf{S}$. De röda linjerna (parallella med x' -axeln) anger samtidighet i $\mathbf{S}'$ och de lila i $\mathbf{S}''$. $\mathbf{B}$ äger rum före $\mathbf{A}$ i $\mathbf{S}'$, vilket är samma sak som att säga att farkostens framända lämnar tunneln innan bakändan åker in. Mellan t'_B och t'_A är tunneln helt "täckt" av farkosten. I $\mathbf{S}''$ är det tvärtom: $t''_A < t''_B$.

