

Lösningssförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, TIF375

Lördagen 4 juni 2022

Examinator: Martin Cederwall

Lösningssförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modelllösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Inför en x -koordinat i hjulets färdriktning, och en rotationsvinkel ϕ för hjulet. Rullningsvillkoret ger $r\dot{\phi} = \dot{x}$. Potentialen är $V = -mgx \sin \alpha$. Kinetiska energin fås (t.ex.) från momentan rotation runt kontaktpunkten som

$$T = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mR^2 + mr^2)\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m(1 + \frac{R^2}{2r^2})\dot{x}^2.$$

Rörelseekvationen ger den konstanta accelerationen

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{R^2}{2r^2}},$$

som med de aktuella begynnelsevillkoren har lösningen

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{R^2}{2r^2}} t^2.$$

$x(T) = L$, där

$$T = \sqrt{\frac{2L}{g \sin \alpha} (1 + \frac{R^2}{2r^2})}.$$

Rimlighetskontroll kan t.ex. ta fasta på beroendet av α och av R/r .

2. Corioliskraftens horisontella del är $2m\Omega \sin \theta$, riktad österut, där Ω är jordrotationen. Spåret kan alltså lutas åt väster med en lutningsvinkel α som uppfyller

$$\tan \alpha = \frac{2\Omega v \sin \theta}{g}.$$

Om t.ex. $v \approx 100$ m/s fås en vinkel av storleksordningen 10^{-3} .

3. Inför ett koordinatsystem xyz med origo i masscentrum och z -axeln vinkelrät mot skivan. Tröghetsmatrisen fås genom att addera bidragen från skivan och punktmassorna.

$$I_{\text{skiva}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}ma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}ma^2 \end{pmatrix}, \quad I_{\text{massor}} = 2 \cdot \frac{m}{24} \begin{pmatrix} (2a)^2 & 0 & -a \cdot 2a \\ 0 & a^2 + (2a)^2 & 0 \\ -a \cdot 2a & 0 & a^2 \end{pmatrix},$$

dvs.

$$I = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{7}{12} \end{pmatrix}.$$

y -axeln är en huvudtröghetsaxel med huvudtröghetsmoment $\frac{2}{3}ma^2$. Diagonalisering av resten ger axlarna längs $(1, 0, 1)$ och $(1, 0, -1)$ med huvudtröghetsmoment $(\frac{7}{12} - \frac{1}{6})ma^2 = \frac{5}{12}ma^2$ resp. $(\frac{7}{12} + \frac{1}{6})ma^2 = \frac{3}{4}ma^2$.

4. Den kinetiska energin är $T = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2$. Den potentiella energin är

$$V = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2}k|\vec{r} - \vec{r}_i|^2 = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2}k(|\vec{r}|^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}_i + |\vec{r}_i|^2) = 2kr^2 + 2ka^2 .$$

Om vi struntar i den sista konstanten har vi $L = T - V = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - 2kr^2$. Rörelseekvationen (Lagranges ekvationer) blir $m\ddot{\vec{r}} + 4k\vec{r} = 0$, med den allmänna lösningen

$$\vec{r}(t) = \vec{A} \cos \omega t + \vec{B} \sin \omega t ,$$

där $\omega = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$ och $\vec{A}$ och $\vec{B}$ är vektorer som bestäms av begynnelsevillkoren.

5. Låt $c = 1$. I $\mathbf{S}'$ beskrivs ljupulsen enligt

$$\begin{aligned} dx' &= \cos \alpha_0 dt' , \\ dy' &= \sin \alpha_0 dt' . \end{aligned}$$

Lorentztransformera till systemet $\mathbf{S}$ och sätt in ovanstående:

$$\begin{aligned} dx &= \gamma(v)(dx' + vdt') = \gamma(v)(\cos \alpha_0 + v)dt' , \\ dy &= dy' = \sin \alpha_0 dt' , \\ dt &= \gamma(v)(dt' + vdx') = \gamma(v)(1 + v \cos \alpha_0)dt' . \end{aligned}$$

I $\mathbf{S}$ har man alltså

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\cos \alpha_0 + v}{1 + v \cos \alpha_0} dt = \cos \alpha dt , \\ dy &= \frac{\sin \alpha_0}{\gamma(v)(1 + v \cos \alpha_0)} dt = \sin \alpha dt , \end{aligned}$$

vilket bestämmer α . Vinkeln blir mindre i $\mathbf{S}$ än i $\mathbf{S}'$. (En bra konsistenskontroll är att kvadraterna av $\cos \alpha$ och $\sin \alpha$ enligt ovan adderar till 1.)