

## Kapitel 2

# Algebra

### Räkneoperationer för reella tal

#### T 2.1 Förenkla

a)  $(x+3)(x-3) - (x+3)^2$

b)  $(x+3)(x-3) - (x-3)^2$

c)  $(3x+5)^2 - (3x-5)^2$ .

#### 2.2 Multiplicera ihop de tre parenteserna $(a-b)^3$ . (Ser du något mönster?)

#### T 2.3 Visa att

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16}) = \frac{a^{32}-b^{32}}{a-b} \quad \text{om } a \neq b.$$

#### 2.4 Använd huvudräkning för att avgöra vilka av talen

$$\frac{2}{7}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{4}{14}, \quad \frac{48}{168}, \quad \frac{24}{84} \quad \text{och} \quad \frac{0.00002}{0.000007} \quad \text{som är lika.}$$

#### 2.5 Skriv på gemensamt bråkstreck med så liten nämnare som möjligt:

a)  $\frac{1}{7} - \left( \frac{15}{14} + \frac{1}{2} \right)$

b)  $\frac{5}{6} - \left( \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right).$

#### 2.6 Skriv på gemensamt bråkstreck med så liten nämnare som möjligt:

a)  $\frac{1}{60} + \frac{1}{108} - \frac{1}{72}$

b)  $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{1}{9}$

c)  $\frac{1}{35} - \frac{1}{25} + \frac{1}{63} - \frac{1}{245}.$

#### 2.7 Förenkla

a)  $\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}}$

b)  $\frac{\frac{a}{2}}{\frac{4}{a}}$

c)  $\frac{\frac{14a}{a+2}}{\frac{7}{6a+12}}$

d)  $\frac{\frac{a}{a+3}}{a^2+3a}.$

#### 2.8 Förenkla

a)  $\frac{\frac{3}{5x} - \frac{x}{15}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}$

b)  $\frac{x^2+1}{1+\frac{1}{x^2}}$

c)  $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}{\frac{x^2-y^2}{(xy)^2}}.$

**2.9 Förenkla**

$$\text{a) } \frac{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2}$$

$$\text{b) } \frac{\frac{16x^4}{81} - y^4}{\frac{2x}{3} + y}$$

$$\text{c) } \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}.$$

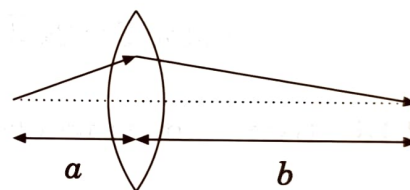
**2.10** Vid parallellkoppling av  $n$  stycken resistorer med resistans  $R_1, R_2, \dots, R_n$  så gäller för den resulterande resistansen  $R$  att

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

- a) Vad blir resultatet om man parallellkopplar tre resistorer med resistansen 2, 3 respektive 4 ohm?  
 b) Med vilken resistans skall en resistor på 5 ohm parallellkopplas för att resultatet skall bli 3 ohm?

**2.11** Då en ljusstråle bryts i en tunn lins gäller *linsformeln*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$



där  $a$  och  $b$  är avståndet från ljuskällan respektive bilden till linsen (se figuren) samt  $f$  är linsens brännvidd. Var hamnar bilden av ett objekt som befinner sig 600 mm från linsen om brännvidden är 100 mm?

**2.12** Skriv  $\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$  med ett enda bråkstreck.

**Kvadratrötter och potenser**

**T 2.13** Förläng bråket  $\frac{3 + \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$  så att nämnaren blir rotfri.

**2.14** Skriv om bråken

$$\text{a) } \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{11}}$$

$$\text{c) } \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$$

så att de får rotfri nämnare.

**T 2.15 Förenkla**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \sqrt{12} - \sqrt{3} & \text{b)} \quad \frac{\sqrt{42}}{\sqrt{6}} \quad \text{c)} \quad \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \\ \text{d)} & \frac{\sqrt{18} + \sqrt{8}}{5} & \text{e)} \quad \sqrt{3^2 + 4^2} - 3 - 4 \quad \text{f)} \quad \sqrt{5^2 + 12^2} \end{array}$$

**2.16 Förenkla**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{\sqrt{162} + \sqrt{98}}{\sqrt{50} + \sqrt{2}} & \text{b)} \quad \frac{\sqrt{(-4)^2}}{\sqrt{4^2}} \quad \text{c)} \quad \left(\sqrt{12} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ \text{d)} & ((\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{x+y})((\sqrt{x} + \sqrt{y}) - \sqrt{x+y}). \end{array}$$

**2.17** Tre studenter hade löst samma uppgift. Alla tre hade till synes olika svar, nämligen

$$\frac{\sqrt{216}}{3\sqrt{2}}, \quad \frac{\sqrt{108}}{3} \quad \text{och} \quad \sqrt{12}.$$

I facit stod det  $2\sqrt{3}$ . Ledde något svar till poängavdrag?

**2.18 Skriv som en potens**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & 3^4 \cdot 3^2 & \text{b)} \quad 2^7 \cdot 2^{-3} \quad \text{c)} \quad 4^2 \cdot 4^{-5} \cdot 4 \\ \text{d)} & \frac{3^7}{3^3} & \text{e)} \quad \frac{4^5}{4^9} \quad \text{f)} \quad \frac{2^{-7}}{2^5} \end{array}$$

**2.19 Beräkna**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & 3^5 \cdot 10^5 \cdot 3^{-3} \cdot 10^3 & \text{b)} \quad \frac{2^8 \cdot 5^6}{2^6 \cdot 5^5} \quad \text{c)} \quad \frac{2^4 \cdot 10^4}{2 \cdot 10^5} \end{array}$$

**2.20 Förenkla så långt som möjligt**

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & b^{-0.2} \cdot b^{1.7} \cdot b^{-2.5} \\ \text{b)} & (a^3)^{-0.5} \cdot (a^{-5})^{-0.3} \\ \text{c)} & \frac{a}{a^{-3.7} \cdot a^{0.5}} \\ \text{d)} & \frac{x \cdot x^{-1.6} \cdot x^{0.2}}{x^{-1.4}} \end{array}$$

**2.21 Förenkla**

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \frac{3^2 \cdot 2^4}{6^3} & \text{b)} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} \quad \text{c)} \quad (\sqrt{64})^{2/3} \\ \text{d)} & \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} & \text{e)} \quad 2^{(2^3)} \quad \text{f)} \quad (2^2)^3 \end{array}$$

**2.22 Förenkla**

a)  $(\sqrt{5})^{-4}$

b)  $\left(\frac{4}{9}\right)^{1/2}$

c)  $\left(\frac{1}{9}\right)^{3/2}$

d)  $16^{1/4}$

e)  $(\sqrt{8})^{2/3}$

f)  $\left(\frac{27}{8}\right)^{-4/3}$

**2.23 Förenkla**

a)  $\frac{a^{3.3}a^{-2.1}}{a^{0.8}}$

b)  $\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a^2}}$

c)  $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^{-1}} \cdot (x^2)^{2/3}$

d)  $\frac{\sqrt[4]{a^3\sqrt{a}}}{\sqrt[8]{1/a}}$

e)  $\frac{\sqrt[4]{x^2\sqrt{y^5}}}{\sqrt{xy}}$

f)  $\left(ab\sqrt[4]{\frac{a^3}{\sqrt{b}\sqrt{b}}}\right)^2$

**2.24** Bestäm  $x$  så att  $(4^x)^5 = \frac{(2^6 \cdot 5^5)^3}{(2^4 \cdot 5^2)^4} \cdot \frac{2^{18}}{5^7}$ .

**Polynom och rationella uttryck****2.25 Faktorisera uttrycken**

a)  $x^2 - 1$

b)  $x^2 + 2x + 1$

c)  $x^3 - 4x$

d)  $x^2 - 2x + 1$

e)  $x^4 + x^2$

f)  $x^2 - 4x + 4$

g)  $a^3 - ab^2$

h)  $a^2b + 2ab^2 + b^3$

i)  $a^3b - 2a^2b^2 + ab^3$

**2.26 Faktorisera uttrycken**

a)  $x(x+2) - 4(x+2)$

b)  $x^2(x^2 - 9) + x^2 - 9$

c)  $x^4 - 16$

d)  $(a+b)(a-b) + a^2 - ab$

e)  $(a-b)^2 - 4$

f)  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$

**T 2.27 Faktorisera uttrycken**

a)  $x^2 - 7x + xy - 7y$

b)  $a^6 - a^4 + a^2 - 1$

c)  $x^2y + 2x^2 - y - 2$

d)  $7x^5 + 7xy^4 - 14x^3y^2$

e)  $a^2 - (b+c)^2$

f)  $(x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2$

g)  $(x^2 + y^2 - z^2)^2 - 4x^2y^2$

**2.28 Kvadratkomplettera polynomen**

a)  $x^2 + 6x + 7$

b)  $x^2 - 7x + 13$

c)  $x^2 + 18x + 81$

d)  $x^2 + 5x$

e)  $x^2 + 17$

- 2.29** Låt  $a$ ,  $b$  och  $c$  vara konstanter. Bestäm  $b$  och  $c$  uttryckt i  $a$  så att

$$x^2 + ax = (x + b)^2 + c \quad \text{för alla } x.$$

(Högerledet är en kvadratkomplettering av uttrycket i vänsterledet.)

- 2.30** Förenkla

a)  $\frac{4x^2 - 4}{2x + 2}$

b)  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$

c)  $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{x^2 - y^2}{(xy)^2}$ .

- 2.31** Förenkla

a)  $\frac{2}{3x + 9} + \frac{x}{x^2 - 9} - \frac{1}{2x - 6}$

b)  $\frac{5}{x - 1} + \frac{8}{x + 1} - \frac{3x + 7}{x^2 - 1}$ .

- 2.32** Förenkla

a)  $\frac{3x - y}{x^2 - 2xy + y^2} - \frac{2}{x - y} - \frac{2y}{(x - y)^2}$

b)  $\frac{a}{a^2 + 4ab + 4b^2} + \frac{2b}{a^2 - 4b^2}$ .

- 2.33** Förenkla

$$\frac{1}{(x - 1)(x - 2)} + \frac{1}{(x - 1)(x - 3)} + \frac{1}{(x - 2)(x - 3)}.$$

- 2.34** Bestäm kvot och rest vid följande polynomdivisioner:

a)  $(x^5 + 3x^4 - 2x^3 + 2x - 1) : (x^3 + x + 1)$

b)  $(x^6 - 1) : (x - 1)$

c)  $(x^4 + 2x^3 + 25) : (x^2 + 4x + 5).$

- 2.35** Faktorisera polynomen (i reella faktorer)

a)  $x^2 - 4$

b)  $x^2 + 2x + 1$

c)  $x^3 - x$

d)  $x^2 - 3x + 2$

e)  $2 - x - x^2$

f)  $x^4 - 2x^3 + x^2$ .

- T 2.36** Faktorisera polynomen (i reella faktorer)

a)  $x^2 - 1$

b)  $x^2 + 1$

c)  $x^3 - 1$

d)  $x^3 + 1$

e)  $x^4 - 1$

f)  $x^4 + 27x$

g)  $x^6 - 64$ .

- 2.37** Polynomet  $p(x) = x^5 - 10x^2 + 15x - 6$  har nollstället  $x = 1$ . Bestäm nollställets multiplicitet och faktorisera polynomet.

- T 2.38** Faktorisera polynomet  $p(x) = x^3 - 2x - 4$ .

## Kapitel 3

### Ekvationer och olikheter

#### Ekvationer

##### T 3.1 Lös ekvationerna

- a)  $(x-1)(x-2)(x-3)=0$                       b)  $x(x^2-4)=0$   
c)  $x^2+10x+24=0$                               d)  $x^2+10x+25=0$   
e)  $x^3+10x^2+24x=0$                           f)  $x^4+10x^3+25x^2=0$ .

- 3.2 a) Bestäm konstanten  $a$  så att  $x=2$  löser ekvationen  $x^2+4x+a=0$ .  
b) Bestäm konstanten  $b$  så att  $x=3$  löser ekvationen  $x^2+bx+12=0$ .

##### 3.3 Faktorisera $p(x)$ så långt som möjligt (i reella faktorer), då $p(x)$ ges av

- a)  $x^2-x-\frac{3}{4}$                       b)  $2x^2-3x-2$                       c)  $-x^2+x+12$   
d)  $x^3-x^2+\frac{1}{4}x$                       e)  $3x^3-6x^2+15x$                       f)  $x^4-6x^2+8$ .

- 3.4 I en viss likbent triangel är basen 6 cm och de två lika sidorna 5 cm. Finns det någon annan likbent triangel som både har samma omkrets och samma area?

##### 3.5 Lös ekvationerna

- a)  $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0$                       b)  $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-4}$   
c)  $\frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2+3x} = 0$                       d)  $\frac{1}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{x^2}{4-x^2}$ .

- 3.6 Man rör en båt 6.4 km uppför en flod och tillbaks igen på totalt 2 timmar. Strömhastigheten i floden är 2.4 km/h. Med vilken hastighet skulle båten ha färdats i stillastående vatten?

##### L 3.7 Lös ekvationerna

- a)  $\sqrt{x+2}=x$                       b)  $\sqrt{x+2}=-x$                       c)  $x-\sqrt{x-2}=4$ .

**T 3.8** Lös ekvationerna

a)  $\sqrt{x+2} = \sqrt{2x+1}$

b)  $\sqrt{3x+2} = \sqrt{2x+1}$

c)  $\sqrt{x+2} = \sqrt{x}$

d)  $\sqrt{x-2}\sqrt{x+3} = x$

e)  $(3 + \sqrt{x})(3 - \sqrt{x}) = 8\sqrt{x}$

f)  $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} + \sqrt{3+x}$

**Olikheter****3.9** Vilka av olikheterna a)  $2 < 3$  b)  $2 \leq 3$  c)  $2 \leq 2$  är sanna?**3.10** Använd huvudräkning för att ordna talen

$$\frac{2}{0.02}, \quad \frac{31}{0.2}, \quad \text{och} \quad \frac{0.00009}{0.000006}$$

i storleksordning.

**3.11** Lös olikheterna

a)  $3x + 1 < 2$

b)  $-3x + 2 \leq 1$

c)  $3x + 1 > 4x + 5$

d)  $(x-3)(x+3) \leq x^2$

**L 3.12** Lös olikheterna

a)  $\frac{x+4}{x-1} > 0$

b)  $\frac{x+4}{x-1} < 0$

c)  $\frac{x+1}{x(x-1)} < 0$

d)  $(x+2)(2x-1) > 0$

**L 3.13** Lös olikheten  $\frac{3x+1}{x+2} < 2$ .**3.14** Lös olikheterna

a)  $\frac{x^2+1}{x} < x$

b)  $\frac{2x^2}{x+2} < x-2$

c)  $\frac{x^2+2}{x^2+1} > 1$

**T 3.15** Lös olikheterna

a)  $x^2 < 4$

b)  $x^2 > 4$

c)  $(x+1)^2 > (x+5)^2$

**3.16** Lös olikheten  $\frac{1-x^4}{1-(x^2+1)^2} < 1$ .**3.17** a) Lös ekvationen  $x + \frac{4}{x} = 5$ . b) Lös olikheten  $x + \frac{4}{x} > 5$ .