

MVE675 — Exempeluppgifter inför stora duggan

Antalet stjärnor är ungefär proportionellt till hur många bonuspoäng uppgiften kan ge.

Dokumentet saknar facit. Det absolut bästa sättet att förbereda sig för duggan är att diskutera, förklara och jämföra lösningar med era kurskamrater. Jag uppmuntrar er att *inte* använda någon programvara eller hemsidor för att komma fram till, eller ens kontrollera, svaren. Om ni får olika svar, jämför lösningar och se var era lösningar skiljer sig åt.

Senast uppdaterad: 22 september 2022

1. ★ Beräkna $\sin(-2\pi/3)$.
2. ★★ Hitta alla lösningar $x \in \mathbb{R}$ till $\sin(2x + \pi/4) = 1/\sqrt{2}$.
3. ★ Vilka av följande är lika med $\sin x$ för alla x ?

$$\text{(A)} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \quad \text{(B)} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \quad \text{(C)} \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \quad \text{(D)} \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

Motivera ditt svar.

4. ★ Beräkna absolutebeloppet av

$$\frac{(1 + 2i)(2 - i)}{1 + i}.$$

5. ★ Har ekvationssystemet

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z - 3i| = 2 \end{cases}$$

några komplexa lösningar z ? Ange isåfall en lösning.

6. ★★ Skriv på polär form:

$$z = \frac{2 + 2i}{1 + \sqrt{3}i}.$$

7. ★★ Beräkna $(1 - i)^8$.

8. ★★ Hitta alla komplexa z sådana att $z^3 = 3 + \sqrt{3}i$.

9. ★ Ange alla (reella och komplexa) nollställen, och deras multiplicitet, för polynomet

$$p(x) = (x - 4)^3(x - \sqrt{2})((x - 1)^2 + 4)^2.$$

10. ★ Låt $\mathbf{u} = (1, 3)$ och $\mathbf{v} = (2, -1)$.
- (a) Beräkna $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$.
- (b) Beräkna $\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\|$.
11. ★ Avgör om $\mathbf{w} = (4, 3, 1)$ är en linjärkombination av $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$ och $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$.
12. ★ Ge ett exempel på tvådimensionella vektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sådana att
- $\mathbf{w}$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$, men
 - $\mathbf{v}$ inte är en linjärkombination av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$.
13. ★ Antag att $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är vektorer av samma dimension. Är det alltid sant att $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ och $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ är ortogonala? Motivera ditt svar.
14. ★ Beräkna $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ där $\mathbf{u} = (3, -2, -5)$ och $\mathbf{v} = (2, 5, -2)$. Är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ ortogonala?
15. ★★ Hitta ortogonalprojektionen av $\mathbf{u} = (7, 4, 4)$ på $\mathbf{v} = (2, -1, -2)$.
16. ★ Beräkna vektorprodukten $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ där $\mathbf{u} = (4, 0, 2)$ och $\mathbf{v} = (-4, -2, 2)$.
17. ★ Ange en vektor som är ortogonal mot både $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$ och $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$.
18. ★★ Ett av följande system saknar lösning, ett har exakt en lösning, och ett har oändligt många lösningar. Ange vilket system som har vilket antal lösningar. (Du behöver inte ange lösningarna när de existerar.)

$$(\mathbf{A}) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \\ -2x + y = -2 \end{cases} \quad (\mathbf{B}) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \\ 6x + y = -2 \end{cases} \quad (\mathbf{C}) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 0 \\ 6x + y = -1 \end{cases}$$

19. ★★ Ange samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 2 \\ 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

20. ★★ Använd Gausselimination för att reducera ekvationssystemet till trappstegsform:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 2 \\ -2x_1 + 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

21. *** Ange samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ -x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 2 \end{cases}$$

22. ★ Ange linjen genom $P : (2, -1, -2)$ och $Q : (4, 0, 2)$ på parameterform.

23. ** Är linjerna ℓ_1 och ℓ_2 , givna nedan, parallella?

$$\ell_1 : 4x + 3y = 2, \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 6 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

24. ★ Ange planet genom $P : (1, 2, 3)$, $Q : (2, 2, 2)$ och $R : (0, 2, 0)$ på parameterform.

25. ★ Ange en ekvation på parameterform för planet $\pi : 6x - y + 2z = 2$.

26. ** Ange en ekvation på normalform för planet

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2s + t \\ y = 2t \\ z = 2 + s - t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

27. ** Ange ortogonalprojektionen av $P : (2, 4)$ på linjen $\ell : 3x - 2y = 2$.

28. ** Ange ortogonalprojektionen av $P : (1, 0, 6)$ på planet $\pi : 2x - y + z = 0$.

29. *** Vilken punkt i planet π , givet nedan, ligger närmast origo?

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + s - t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 + s, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

30. ** Hitta arean av triangeln med hörn $P : (1, 0, 2)$, $Q : (2, 3, 1)$ och $R : (2, 0, 1)$.

31. ** Beräkna den skalära trippelprodukten $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ när $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$, $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$.