MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola

2022–09–29 8:15–10:00
Examinator: Tony Johansson

Dugga
MVE675 – Algebra

Skrivningstid 100 minuter.
Totalt 16 poäng.
Bonuspoängen är hälften av poängen på duggan, avrundat uppåt.
Hjälpmedel: Inga

Namn: . . . .

Program (ringa in): DI EI

Uppgift 1	Uppgift 2	Uppgift 3	Uppgift 4	Summa	Bonuspoäng

Ange svaren i början av din lösning.

Motivera dina svar väl. Förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad lösningen som ger poäng, inte bara svaret.

Uppgift 1: Beräkna $\sin(7\pi/6)$.

(2 poäng)

Svar: $-1/2$.

Lösning:
Det finns flera sätt att beräkna svaret, här är ett som använder identiterna $\sin(\pi - x) = \sin x$ och $\sin(-x) = -\sin x$. Vi har

$$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

så

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) &= \sin\left(\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Uppgift 2: Beräkna vektorprodukten $(-1, 0, 2) \times (2, 3, 1)$.

(2 poäng)

Svar: $(-6, 5, -3)$.

Lösning:
Vektorprodukten av två tredimensionella vektorer är

$$(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = (y_1 z_2 - y_2 z_1, z_1 x_2 - z_2 x_1, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

I detta fallet får vi då

$$\begin{aligned}(-1, 0, 2) \times (2, 3, 1) &= (0 \cdot 1 - 2 \cdot 3, 2 \cdot 2 - (-1) \cdot 1, (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 2) \\ &= (-6, 5, -3).\end{aligned}$$

Uppgift 3: Hitta ortogonalprojektionen av punkten $P : (4, 2, 1)$ på planet $\pi : 5x - 2y + 3z = 0$.

(4 poäng)

Svar: $(3/2, 3, -1/2)$.

Lösning:
Planets normal är $\mathbf{n} = (5, -2, 3)$. Låt ℓ vara linjen genom P som har riktningsvektor $\mathbf{n}$. Denna kan skrivas på parameterform som

$$\ell : \begin{cases} x = 4 + 5t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = 1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ortogonalprojektionen Q kommer vara skärningspunkten mellan ℓ och π. Vi sätter in parameterformen i planets ekvation:

$$\begin{aligned} 5(4 + 5t) - 2(2 - 2t) + 3(1 + 3t) = 0 \quad &\iff \quad 19 + 38t = 0 \\ &\iff \quad t = -\frac{19}{38} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Punkten Q ges av att stoppa in $t = 1/2$ i linjens ekvation,

$$Q : \begin{cases} x = 4 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) & = 3/2 \\ y = 2 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) & = 3 \\ z = 1 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) & = -1/2 \end{cases}$$

Uppgift 4: Ange samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -4 \\ x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & 0 \\ -x_1 & & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & -4 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & & -2x_5 & = & 0 \\ x_1 & +3x_2 & & -x_4 & -5x_5 & = & 2 \end{array}\right.$$

(8 poäng)

Svar:

$$\left\{\begin{array}{rcrrl} x_1 & = & 2 & -t & \\ x_2 & = & -2 & +2t & \\ x_3 & = & 4 & -3t & \\ x_4 & = & -6 & & \\ x_5 & = & & t, & t \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Lösning:
Gausselimination används. I beskrivning används bokstäver (a)–(e) för ekvationerna.

$$\left\{\begin{array}{rrrrrcl|l} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -4 & \\ x_1 & +x_2 & & & -x_5 & = & 0 & -(a) \\ -x_1 & & +x_3 & +x_4 & +2x_5 & = & -4 & +(a) \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & & -2x_5 & = & 0 & -(a) \\ x_1 & +3x_2 & & -x_4 & -5x_5 & = & 2 & -(a) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrcl|l} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -4 & \\ & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 4 & \\ & 2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & +2x_5 & = & -8 & +2(b) \\ & x_2 & & -x_4 & -2x_5 & = & 4 & +(b) \\ & x_2 & -x_3 & -2x_4 & -5x_5 & = & 6 & +(b) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -4 \\ & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 4 \\ & & & & 0 & = & 0 \\ & & -x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = & 8 \\ & & -2x_3 & -3x_4 & -6x_5 & = & 10 \end{array}\right.$$

Tredje ekvationen kan vi ta bort. Lösningen fortsätter på nästa sida.

Lösning Uppgift 4, fortsättning:

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -4 \\ & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 4 \\ & & -x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = & 8 \\ & & -2x_3 & -3x_4 & -6x_5 & = & 10 \end{array}\right. \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ -2(c) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = & -4 \\ & -x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = & 4 \\ & & -x_3 & -2x_4 & -3x_5 & = & 8 \\ & & & x_4 & & = & -6 \end{array}\right.$$

Nu har vi uppnått trappstegsform, så lösningen kan hittas. Vi har pivotvariabler x_1, x_2, x_3, x_4, och fri variabel x_5. Sätt $x_5 = t$. Vi löser ut resterande pivotvariablerna nerifrån och upp.

- $x_4 = -6$.
- $-x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8$ ger
$$x_3 = -2x_4 - 3x_5 - 8 = -2(-6) - 3t - 8 = 4 - 3t.$$
- $-x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 4$ ger
$$x_2 = -4 - x_3 - x_4 - x_5 = -4 - (4 - 3t) - (-6) - t = 2t - 2.$$
- $x_1 = 2x_2 + x_3 + x_4 = -4$ ger
$$x_1 = -4 - 2x_2 - x_3 - x_4 = -4 - 2(2t - 2) - (4 - 3t) - (-6) = 2 - t.$$

  Lösningen är då
$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_1 & = & 2 & -t \\ x_2 & = & -2 & +2t \\ x_3 & = & 4 & -3t \\ x_4 & = & -6 & \\ x_5 & = & & t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Lösning Uppgift 4, fortsättning:

Lösning Uppgift 4, fortsättning:

Extrasida. Får rivas loss och användas som kladdpapper, men kan även lämnas in om du behöver mer plats för någon lösning. Om sidan lämnas in, ange tydligt på motsvarande uppgiftssida att lösningen fortsätter.

Extrasida. Får rivas loss och användas som kladdpapper, men kan även lämnas in om du behöver mer plats för någon lösning. Om sidan lämnas in, ange tydligt på motsvarande uppgiftssida att lösningen fortsätter.
