

MVE675
Detaljerade lärandemål

Här anges i punktform vad studenterna ska lära sig under kursen. Nivån av förståelse som ska uppnås delas in i följande kategorier:

- “Förstå”: studenten behöver inte själv kunna använda begreppet korrekt, men lärare i kursen kommer använda begreppet under föreläsning eller övning.
- “Känna till”: studenten behöver inte kunna konceptet utantill, men ska kunna redogöra för det i stora drag.
- “Veta”: studenten ska kunna saken utantill.
- “Kunna”: studenten ska kunna lösa uppgifter där kunskapen/färdigheten testas.

Dokumentet skrivs under kursens gång, och därför kan lärandemål tillkomma och försvinna mellan versioner. Lärandemål för nuvarande eller kommande läsveckor ska ses som preliminära, medan passerade läsveckor bör vara mer pålitliga. En kommentar inkluderas om ett lärandemål för en passerad läsvecka tillkommer (eller om den förväntade förståelsenivån höjs) från en version till nästa.

På studentportalen ([länk](#)) finns övergripande lärandemål fastställda i kursplanen. I enlighet med Högskoleförordningen är lärandemålen på studentportalen de officiella, och detta dokument ska ses som kompletterande och vägledande.

Senaste uppdatering: 11 oktober 2022

Innehåll

0	Lärandemål för repetitionskursen	3
0.1	Räkneregler	3
0.2	Polynom	3
0.3	Ekvationer och olikheter	4
0.4	Mängdlära	4
0.5	Koordinatsystem, räta linjens ekvation, cirkelns ekvation	5
0.6	Absolutbelopp, avstånd	5
1	Läsvecka 1	6
1.1	Trigonometri (Analys 8.4, 8.5)	6
1.2	Komplexa tal (Analys 6.1, 6.2, 6.3)	7
2	Läsvecka 2	8
2.1	Komplexa polynomekvationer (Analys 6.4)	8
2.2	Vektorer (Algebra 1.1, 1.2)	9
2.3	Skalarprodukt (Algebra 1.3)	9
3	Läsvecka 3	10
3.1	Vektorprodukt (Algebra 1.4)	10
3.2	Linjära ekvationssystem och Gausselimination (Algebra 3.1, 3.2)	10
3.3	Linjer och plan (Algebra 2.1, 2.2)	11
4	Läsvecka 4	12
4.1	Projektion och spegling (Algebra 2.3)	12
4.2	Area och volym (Algebra 2.4)	12
4.3	Mer om linjära ekvationssystem (Algebra 3.3)	13
5	Läsvecka 5	13
5.1	Matrisalgebra (Algebra 4.1)	13
6	Läsvecka 6	14
6.1	Matriser och ekvationssystem (Algebra 4.2)	14
6.2	Invers matris (Algebra 4.3)	14
7	Läsvecka 7	15
7.1	Linjärt beroende (Algebra 5.1)	15
7.2	Minstakvadratmetoden (Algebra 4.4)	15
7.3	Determinanter (Algebra 6.1, 6.2)	15
7.4	Cramers regel (Algebra 6.3)	16
7.5	Större determinanter (Algebra 6.4, 6.5)	16

0 Lärandemål för repetitionskursen

Dessa betraktas som förkunskapskrav för MVE675.

0.1 Räkneregler

0.1.1 Kunna distributiva lagen för reella tal: $(a + b)c = ac + bc$.

0.1.2 Kunna kvadreringsreglerna $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ och $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

0.1.3 Kunna konjugatregeln $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

0.1.4 Kunna tillämpa kvadrerings- och konjugatreglerna "baklänges" för att faktorisera uttryck.

0.1.5 Kunna reglerna för multiplikation och division av bråk:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

0.1.6 Kunna addera bråk (med minsta gemensamma nämnare när nämnaren är heltal).

0.1.7 Känna till definitionen av $\sqrt{a}$ för reella tal $a \geq 0$, och veta att $\sqrt{a} \geq 0$.

0.1.8 Kunna följande räkneregler för potenser med reella x, y och positiva a, b :

$$(ab)^x = a^x b^x, \quad a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

samt att $a^0 = 1$ (även när $a = 0$), och att $(a + b)^x \neq a^x + b^x$ generellt.

0.2 Polynom

0.2.1 Förstå skillnaden mellan en koefficient och en obekant i uttryck som $ax^2 + bx + c$.

0.2.2 Kunna avgöra om ett givet uttryck (med en obekant) är ett polynom.

0.2.3 Veta vad ett nollställe för ett polynom är.

0.2.4 Känna till faktorsatsen.

0.2.5 Kunna utföra polynomdivision för att hitta kvot och rest.

0.2.6 Kunna faktorisera andragradspolynom i reella faktorer (samt avgöra om sådan faktorisering är omöjlig) med hjälp av kvadratkomplettering.

0.2.7 Kunna faktorisera tredjegradspolynom där ett nollställe är lätt att gissa.

0.2.8 Kunna faktorisera speciella polynom av högre grad där något känt algebraiskt trick kan användas, till exempel $x^4 - 16$ och $x^4 - 6x^2 + 9$.

0.3 Ekvationer och olikheter

0.3.1 Förstå vad en ekvations lösningsmängd är.

0.3.2 Förstå att $\Leftrightarrow$ (ekvivalens) används mellan ekvationer med samma lösningsmängd.

0.3.3 Förstå att $\Rightarrow$ (implikation) används från en ekvation till nästa när lösningsmängden kan förstoras:

$$\sqrt{3x+4} = x \implies 3x+4 = x^2.$$

0.3.4 Kunna lösa polynomekvationer av samma svårighetsgrad som faktoreringsproblemen listade under **Polynom**.

0.3.5 Kunna lösa ekvationer med ett eller flera rotuttryck, och avgöra om rötter är sanna eller falska.

0.3.6 Veta vad $<, \leq, >, \geq$ betyder.

0.3.7 Kunna lösa olikheter av formen $ax + b \leq cx + d$ genom omflyttning av termer och multiplikation/division av båda led med reella tal.

0.3.8 Kunna lösa olikheter med polynom och rationella uttryck genom faktorisering och teckentabell. Exempel på svårighetsgrad:

$$\frac{6-x}{x-1} < 2, \quad x^3 - 4x^2 - 5x \leq 0, \quad \frac{2x-9}{x} \geq \frac{x-9}{x-1}$$

0.4 Mängdlära

0.4.1 Förstå vad en mängd är.

0.4.2 Veta vad grundmängderna $\mathbb{N}$ (positiva heltal), $\mathbb{Z}$ (alla heltal), $\mathbb{Q}$ (rationella tal), $\mathbb{R}$ (reella tal) är.

0.4.3 Förstå mängddefinitioner av formen $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4x\}$, alltså "mängden av reella tal x sådana att $x^2 = 4x$ ".

0.4.4 Förstå att två mängder är samma om och endast om de innehåller samma objekt (oavsett beskrivning), till exempel $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4x\} = \{0, 4\}$.

0.4.5 Förstå hur symbolerna $\in$ (tillhör) och $\notin$ (tillhör ej) används.

0.5 Koordinatsystem, räta linjens ekvation, cirkelns ekvation

- 0.5.1 Känna till planet $\mathbb{R}^2$, dess fyra kvadranter, samt x - och y -axeln.
- 0.5.2 Veta vad som menas med allmän form och k -form för räta linjens ekvation.
- 0.5.3 Kunna bestämma en ekvation (på både k -form och allmän form) för en linje, givet linjens lutning och en punkt på linjen.
- 0.5.4 Kunna bestämma en ekvation (på både k -form och allmän form) för en linje, givet två punkter på linjen.
- 0.5.5 Kunna bestämma skärningen mellan två linjer.
- 0.5.6 Veta att $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ är ekvationen för en cirkel med centrum (a, b) och radie r .
- 0.5.7 Kunna omvandla en ekvation till cirkelns ekvation med hjälp av kvadratkomplettering.

0.6 Absolutbelopp, avstånd

- 0.6.1 Veta formeln för avståndet mellan två punkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2) .
- 0.6.2 Veta definitionen för absolutbelopp $|a|$ för $a \in \mathbb{R}$.
- 0.6.3 Kunna lösa ekvationer av formen $|ax + b| = cx + d$.
- 0.6.4 Förstå hur olikheter av formen $|ax + b| > c$ och $|ax + b| < c$ kan lösas.

1 Läsvecka 1

1.1 Trigonometri (Analys 8.4, 8.5)

1.1.1 Veta vad förhållandet mellan grader och radianer är: $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad.

1.1.2 Känna till hur $\sin \theta$ och $\cos \theta$ definieras utifrån enhetscirkeln.

1.1.3 Kunna beräkna $\sin \theta$ och $\cos \theta$, givet en rätvinklig triangel med givna sidlängder och ett hörn med vinkel θ .

1.1.4 Veta att $\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta$, och kunna beräkna $\tan \theta$ givet en rätvinklig triangel med givna sidlängder och ett hörn med vinkel θ .

1.1.5 Kunna de grundläggande trigonometriska identiteterna:

$$\begin{aligned}\cos(x + k2\pi) &= \cos x, & k \in \mathbb{Z} \\ \sin(x + k2\pi) &= \sin x, & k \in \mathbb{Z} \\ \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, & (\text{trigonometriska ettan}) \\ \cos(-x) &= \cos x, \\ \sin(-x) &= -\sin x, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x, \\ \sin(\pi - x) &= \sin x, \\ \cos(\pi - x) &= -\cos x.\end{aligned}$$

1.1.6 Känna till additions- och subtraktionsformlerna

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x + y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y,\end{aligned}$$

samt dubbla vinkels formler:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x.\end{aligned}$$

1.1.7 Kunna utantill de trigonometriska värdena i Tabell 1 (första kvadranten).

θ (grader)	0°	30°	45°	60°	90°
θ (radianer)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin \theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos \theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0

Tabell 1: Trigonometriska värden som ska kunnas utantill.

1.1.8 Kunna använda Tabell 1 och enhetscirkeln eller trigonometriska identiteter för att beräkna $\cos \theta$ och $\sin \theta$ i övriga kvadranter, när

$$\theta \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, -\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{6}, -\pi \right\}. \quad (1)$$

1.1.9 Kunna beräkna $\arcsin x$ och $\arccos x$ för $x \in \{0, \pm 1/2, \pm 1/\sqrt{2}, \pm \sqrt{3}/2, \pm 1\}$.

1.1.10 Kunna hitta samtliga lösningar x till $\sin x = a$ och $\cos x = a$ när högerledet är $a \in \{0, \pm 1/2, \pm 1/\sqrt{2}, \pm \sqrt{3}/2, \pm 1\}$.

1.1.11 Kunna beräkna $\arctan x$ för $x \in \{0, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1, \pm \sqrt{3}\}$.

1.2 Komplexa tal (Analys 6.1, 6.2, 6.3)

1.2.1 Förstå hur den imaginära enheten i definieras.

1.2.2 Förstå mängddefinitionen av komplexa tal:

$$\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1.2.3 Förstå vad som menas med realdel och imaginärdel av ett komplext tal.

1.2.4 Förstå vad som menas med rektangulär form för ett komplext tal.

1.2.5 Kunna beräkna konjugatet av ett komplext tal.

1.2.6 Kunna beräkna summan och produkten av två komplexa tal.

1.2.7 Kunna lösa komplexa ekvationer av formen $az + b\bar{z} = c$ där a, b, c är komplexa koefficienter.

1.2.8 Kunna beräkna absolutbeloppet av ett komplext tal.

- 1.2.9 Känna till triangelolikheten: $|z + w| \leq |z| + |w|$.
- 1.2.10 Kunna skissa cirkelregioner som ges av exempelvis $|z + 1| = 2$ eller $|z - 3| \leq 4$.
- 1.2.11 Kunna beräkna kvoten u/w av två komplexa tal, och skriva den på rektangulär form.
- 1.2.12 Kunna beräkna argumentet θ för z när θ hör till vinklarna i Tabell 1 och i (1).
- 1.2.13 Kunna växla mellan rektangulär och polär form när θ hör till tidigare nämnda värden.
- 1.2.14 Veta att $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.
- 1.2.15 Kunna de Moivres formel: $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.
- 1.2.16 Känna till Eulers formler,

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

- 1.2.17 Kunna beräkna $(a + bi)^n$ för godtyckliga heltal n genom att överföra på polär form.

2 Läsvecka 2

2.1 Komplexa polynomekvationer (Analys 6.4)

- 2.1.1 Kunna lösa ekvationer av formen $z^2 + (a + bi)z + (c + di) = 0$.
- 2.1.2 Kunna lösa ekvationer av formen $z^n = w$, där n är ett heltal och w är ett komplext tal på polär form (eller där polär form lätt kan bestämmas).
- 2.1.3 Känna till enhetsrötterna $e^{i2k\pi/n}$, som löser ekvationen $z^n = 1$.
- 2.1.4 Känna till att varje komplext polynom $p(z)$ av grad n kan faktoriseras som

$$p(z) = c(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n)$$

där $c \in \mathbb{C}$ är koefficienten framför z^n , och $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ är nollställena till p .

- 2.1.5 Veta att om ett reellt polynom $p(x)$ har ett komplext nollställe α , så är även konjugatet $\bar{\alpha}$ ett nollställe.
- 2.1.6 Veta att varje reellt polynom $p(x)$ av grad n kan faktoriseras i reella polynom så att varje faktor antingen är linjär ($x - \alpha$ för ett nollställe $\alpha \in \mathbb{R}$) eller irreducibel kvadratisk ($(x - a)^2 + b^2$ där $a + bi$ är ett nollställe).

2.2 Vektorer (Algebra 1.1, 1.2)

2.2.1 Veta hur n -dimensionella vektorer definieras.

2.2.2 Känna till ordet “skalär”, som ofta används istället för “tal” i vektorsammanhang.

2.2.3 Veta hur det n -dimensionella vektorrummet $\mathbb{R}^n$ definieras.

2.2.4 Veta vad som menas med nollvektorn $\mathbf{0}$.

2.2.5 Kunna addera vektorer, och förstå vad det innebär grafiskt när $n = 2, 3$.

2.2.6 Kunna multiplicera vektorer med skalärer, och förstå vad det innebär grafiskt när $n = 2, 3$.

2.2.7 Kunna distributiva lagen för vektoraddition och multiplikation med skalärer:

$$(\lambda + \mu)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{u} + \mu\mathbf{v}.$$

2.2.8 Veta vad det innebär att två vektorer är parallella.

2.2.9 Veta vad det innebär att $\mathbf{v}$ är en linjärkombination av vektorer $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p$.

2.2.10 Kunna beräkna längden $\|\mathbf{u}\|$ av en vektor $\mathbf{u}$ med givna koordinater.

2.2.11 Känna till triangelolikheten för vektorer: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

2.2.12 Veta vad en enhetsvektor är.

2.2.13 Kunna normalisera en vektor.

2.3 Skalärprodukt (Algebra 1.3)

2.3.1 Kunna beräkna skalärprodukten av två n -dimensionella vektorer.

2.3.2 Kunna räkneregler för skalärprodukt:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \\ (\lambda\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\ (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w},\end{aligned}$$

samt förstå varför $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ är odefinierat.

2.3.3 Veta att $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$.

2.3.4 Känna till Cauchy-Schwarz olikhet $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.

2.3.5 Kunna avgöra om två n -dimensionella vektorer är ortogonala.

2.3.6 Kunna beräkna $\cos \theta$, där $\theta \in [0, \pi]$ är vinkeln mellan två vektorer.

2.3.7 Förstå den geometriska betydelsen av ortogonalprojektion.

2.3.8 Kunna beräkna den ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{u}$ på en vektor $\mathbf{v}$:

$$\text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

3 Läsvecka 3

3.1 Vektorprodukt (Algebra 1.4)

3.1.1 Kunna beräkna vektorprodukten av två tredimensionella vektorer:

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

3.1.2 Veta att $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ är en vektor, och att den är ortogonal mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

3.1.3 Veta att $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

3.1.4 Känna till att

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \theta,$$

där $0 < \theta < \pi$ är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

3.1.5 Kunna "högerhandsregeln" för att kunna bestämma riktningen på $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

3.2 Linjära ekvationssystem och Gausselimination (Algebra 3.1, 3.2)

3.2.1 Veta vad en linjär ekvation, och ett linjärt ekvationssystem, är.

3.2.2 Förstå vad som menas med lösningsmängden till ett ekvationssystem.

3.2.3 Veta att lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem antingen är tom, består av en punkt, eller är oändligt stor.

3.2.4 Veta vilka som är de elementära radoperationerna:

- (a) Byta plats på ekvationer.
- (b) Multiplicera en ekvation med en konstant $c \neq 0$,
- (c) Addera en (multipel av) en ekvation till en annan,

3.2.5 Veta att elementära radoperationer inte förändrar lösningsmängden i ett linjärt ekvationssystem.

- 3.2.6 Veta vad som menas med ett linjärt ekvationssystem i trappstegsform (trappformat).
- 3.2.7 **Särskilt viktigt:** Kunna använda Gausselimination för att reducera ett linjärt ekvationssystem till trappstegsform.
- 3.2.8 Veta att ett linjärt ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer kallas underbestämt.
- 3.2.9 Förstå varför underbestämda ekvationssystem ofta har oändligt många lösningar.
- 3.2.10 Kunna avgöra, givet ett ekvationssystem i trappstegsform, vilka obekanta som är pivotvariabler och vilka som är fria variabler.
- 3.2.11 Veta att ett linjärt ekvationssystem med fler ekvationer än obekanta kallas överbestämt.
- 3.2.12 Förstå varför överbestämda ekvationssystem ofta saknar lösningar.
- 3.2.13 **Särskilt viktigt:** Kunna lösa ett linjärt ekvationssystem i trappstegsform. Detta innebär:
- (a) Kunna avgöra om ett linjärt ekvationssystem i trappstegsform har en unik lösning, oändligt många lösningar, eller saknar lösning.
 - (b) Kunna hitta den unika lösningen då en sådan finns.
 - (c) Kunna ange en allmän lösning på parameterform när oändligt många lösningar finns.

3.3 Linjer och plan (Algebra 2.1, 2.2)

Se Rubrik 0.5 för förkunskapskrav gällande koordinatsystem och räta linjens ekvation.

- 3.3.1 Veta att $\mathbb{R}^2$ kallas planet, och $\mathbb{R}^3$ kallas rummet.
- 3.3.2 Förstå hur vektorer kan definieras utifrån punktpar; om $P : (a, b)$ och $Q : (c, d)$ så är $\overrightarrow{PQ} = (c - a, d - b)$.
- 3.3.3 Känna till att $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ för alla punkter P, Q, R .
- 3.3.4 Känna till vad som menas med Ortsvektorn för en punkt P .
- 3.3.5 Förstå hur en linje i n dimensioner kan beskrivas med en ekvation på parameterform med en parameter.
- 3.3.6 Kunna ange parameterform för en linje givet två punkter på linjen.
- 3.3.7 Förstå vad ett plan i rummet är, och hur det kan uttryckas på parameterform med två parametrar.

- 3.3.8 Kunna uttrycka ett plan i tre dimensioner på parameterform, givet tre punkter i planet.
- 3.3.9 Förstå vad som menas med en normal till en rät linje.
- 3.3.10 Känna till normalformen av räta linjens ekvation (för en linje i två dimensioner).
- 3.3.11 Förstå vad som menas med en normal till ett plan.
- 3.3.12 Veta vad som menas med normalformen av planets ekvation.
- 3.3.13 Kunna avgöra, givet en ekvation på parameterform för ett plan π , en ekvation på normalform för π .
- 3.3.14 Kunna avgöra, givet en ekvation på normalform för ett plan π , en ekvation på parameterform för π .
- 3.3.15 Förstå att lösningsmängden till en linjär ekvation med tre obekanta alltid är ett plan i rummet.

4 Läsvecka 4

4.1 Projektion och spegling (Algebra 2.3)

- 4.1.1 Kunna avgöra ortogonalprojektion av en punkt P på en linje ℓ i planet.
- 4.1.2 Kunna avgöra speglingen av en punkt P i en linje ℓ i planet.
- 4.1.3 Kunna avgöra ortogonalprojektion av en punkt P på ett plan π i rummet när planets ekvation på normalform är given.
- 4.1.4 Kunna avgöra ortogonalprojektion av en punkt P på ett plan π i rummet när planets ekvation på parameterform är given.
- 4.1.5 Kunna avgöra speglingen av en punkt P i ett plan π i rummet, i båda nyss nämnda fall.

4.2 Area och volym (Algebra 2.4)

- 4.2.1 Veta att det parallelogram som spänns upp i rummet av $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har area $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$.
- 4.2.2 Kunna avgöra arean av triangeln med tre givna hörnpunkter;
 - (a) i planet,
 - (b) i rummet.

- 4.2.3 Veta vad som menas med parallelepipeden som spänns upp av tre vektorer i rummet.
- 4.2.4 Kunna beräkna volymen av den parallelepiped som spänns upp av tre givna vektorer i rummet.
- 4.2.5 Känna till att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ kallas den skalära trippelprodukten av $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$.

4.3 Mer om linjära ekvationssystem (Algebra 3.3)

- 4.3.1 Veta vad som menas med ett linjärt ekvationssystem i fullständigt reducerad form.
- 4.3.2 Kunna använda Gausselimination för att fullständigt reducera ett linjärt ekvationssystem.
- 4.3.3 Veta vad som menas med ett homogent linjärt ekvationssystem.
- 4.3.4 Veta vad som menas med den triviala lösningen till ett homogent linjärt ekvationssystem.
- 4.3.5 Veta vad som menas med en partikulärlösning till ett inhomogent linjärt ekvationssystem.
- 4.3.6 Veta att den allmänna lösningen till ett ekvationssystem ges av homogenlösningen plus en partikulärlösning.
- 4.3.7 Känna till att följande är ekvivalenta för ett kvadratisk ekvationssystem (dvs ett med lika många ekvationer som obekanta):
- (a) Varje högerled ger en lösning.
 - (b) Varje högerled ger en unik lösning,
 - (c) Den homogena ekvationen har bara den triviala lösningen,

5 Läsvecka 5

5.1 Matrisalgebra (Algebra 4.1)

- 5.1.1 Veta hur en matris definieras.
- 5.1.2 Kunna ange antalet rader och kolonner i en matris, och vilken typ matrisen har.
- 5.1.3 Veta vad som menas med en kvadratisk matris.
- 5.1.4 Veta vad som menas med element a_{ij} i en matris A .
- 5.1.5 Veta vad som menas med en radmatris och en kolonnmatris, och att vektorer kan ses som sådana.

- 5.1.6 Kunna addera matriser.
- 5.1.7 Kunna multiplicera matriser med skalärer.
- 5.1.8 Kunna avgöra, givet typen för två matriser A och B , om matrimultiplikationen AB är möjlig, och isåfall vilken typ AB har.
- 5.1.9 Veta att $AB \neq BA$ generellt, för matriser A och B .
- 5.1.10 Kunna utföra multiplikationen AB , när den är möjlig.
- 5.1.11 Veta vad som menas med nollmatrisen av typ $m \times n$.
- 5.1.12 Veta vad som menas med enhetsmatrisen av typ $n \times n$ (och att ickekvadratiske enhetsmatriser inte existerar).
- 5.1.13 Veta vad som menas med kolonnvektorerna och radvektorerna i en matris.
- 5.1.14 Förstå att om A har typ $m \times n$ och $\mathbf{x}$ har typ $n \times 1$, så är $A\mathbf{x}$ en linjärkombination av kolonnvektorerna i A .
- 5.1.15 Veta vad transponatet A^T för en matris A är.
- 5.1.16 Veta vad som menas med en diagonalmatris.
- 5.1.17 Veta vad som menas med en symmetrisk matris.
- 5.1.18 Veta vad som menas med en (uppåt och nedåt) triangulär matris.

6 Läsvecka 6

6.1 Matriser och ekvationssystem (Algebra 4.2)

- 6.1.1 Förstå hur ett linjärt ekvationssystem med m ekvationer och n obekanta kan ses som en matrisekvation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, där A har typ $m \times n$ och $\mathbf{x}$ och $\mathbf{b}$ är kolonnmatriser.
- 6.1.2 Känna till att Gausseliminaton kan göras med matrisnotation.

6.2 Invers matris (Algebra 4.3)

- 6.2.1 Veta vad det innebär att en kvadratisk matris är inverterbar.
- 6.2.2 Veta vad som menas med inversen A^{-1} till en kvadratisk matris A .
- 6.2.3 Kunna verifiera att två kvadratiske matriser A och B är varandras inverser.

6.2.4 Kunna räknereglererna $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ och $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ för inverterbara matriser A och B .

6.2.5 Kunna avgöra om en kvadratisk matris A är inverterbar, och isåfall beräkna A^{-1} .

6.2.6 Veta vad som menas med en ortogonal matris.

6.2.7 Kunna avgöra om en matris är ortogonal.

6.2.8 Veta att $A^{-1} = A^T$ om och endast om A är ortogonal.

7 Läsvecka 7

7.1 Linjärt beroende (Algebra 5.1)

7.1.1 Veta vad som menas med att en samling vektorer $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linjärt beroende/oberoende (alla tre formuleringarna: Definition 5.1, Sats 5.2, Sats 5.3 i boken).

7.1.2 Kunna ställa upp ett ekvationssystem vars lösning besvarar frågan om $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_p$ är linjärt beroende/oberoende.

7.1.3 Känna till definitionen av m -dimensionella underrum till $\mathbb{R}^n$.

7.1.4 Veta vad som menas med kolonnrummet $\text{Col}(A)$ för en matris.

7.2 Minstakvadratmetoden (Algebra 4.4)

7.2.1 Förstå principen att approximativt lösa ett ekvationssystem $Ax = b$ genom att ortogonalprojicera b på $\text{Col}(A)$.

7.2.2 Veta vad normalekvationen är, för ett ekvationssystem $Ax = b$.

7.2.3 Kunna hitta minstakvadratlösningen till ett ekvationssystem $Ax = b$.

7.2.4 Kunna ställa upp ett ekvationssystem för linjeanpassning givet mätdata.

7.2.5 Förstå grunderna i minstakvadratanpassning till mer allmänna kurvor.

7.3 Determinanter (Algebra 6.1, 6.2)

7.3.1 Veta att en kvadratisk matris är inverterbar om och endast om dess kolonnvektorer är linjärt oberoende.

7.3.2 Kunna beräkna determinanten av en given 2×2 -matris.

7.3.3 Veta att determinantens absolutbelopp är arean av det parallelogram som spänns upp av matrisens kolonnvektorer.

- 7.3.4 Kunna beräkna determinanten av en given 3×3 -matris.
- 7.3.5 Veta att determinanten är samma som den skalära trippelprodukten av de tre kolonnvektorerna.
- 7.3.6 Veta att $\det A = 0$ om och endast om kolonnvektorerna i A är linjärt beroende.
- 7.3.7 Veta att $\det A^T = \det A$, vilket gör att allt som nämns om kolonnvektorer även gäller radvektorer.
- 7.3.8 Förstå notationen $\det(A) = \det(a_1, a_2, \dots, a_n)$, där a_i är kolonnvektorerna.
- 7.3.9 Veta att $\det(\lambda a_1, a_2) = \lambda \det(a_1, a_2)$.
- 7.3.10 Veta att $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ för $n \times n$ -matriser A .
- 7.3.11 Veta att $\det(a_1 + a'_1, a_2) = \det(a_1, a_2) + \det(a'_1, a_2)$.
- 7.3.12 Veta att $\det(A') = -\det(A)$, om A' är en matris som fås genom att byta plats på två kolonner eller rader i A .
- 7.3.13 Veta att $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.
- 7.3.14 Veta att $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, givet att A är inverterbar.
- 7.3.15 Veta att om A är triangulär, så är determinanten lika med produkten av diagonalelementen.

7.4 Cramers regel (Algebra 6.3)

- 7.4.1 Kunna formulera Cramers regel för ett ekvationssystem $Ax = b$ där A är en inverterbar $n \times n$ -matris för godtyckligt n .
- 7.4.2 Kunna använda Cramers regel för att lösa ekvationssystem $Ax = b$ där A är en inverterbar matris av storlek 2×2 eller 3×3 .

7.5 Större determinanter (Algebra 6.4, 6.5)

- 7.5.1 Kunna använda metoden "utveckling efter rad" (eller kolonn) för matriser av godtycklig storlek, i enklare fall.
- 7.5.2 Känna till begreppet adjunkt, och formeln $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$.
- 7.5.3 Känna till att determinanter kan beräknas genom att Gausseliminera till triangulär form.