

MVE675 – Algebra (Exempeltenta med lösningar)

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.

20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

1. (4p) Hitta alla reella lösningar x till $\sin(2x - 3\pi) = 1/2$.
2. (5p) Hitta alla komplexa z sådana att $z^3 = 8i$. Svara på polär form eller på rektangulär form.
3. (2+3p) Beräkna determinanterna

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}, \quad (b) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

4. (4p) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ange inversen A^{-1} , eller visa att den inte existerar.

5. (7p) Hitta reflektionen av punkten $P : (5, 1)$ i linjen $\ell : y = 4x - 2$.
6. (7p) Formulera normalekvationen för minstakvadratlösning av ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$$

Du behöver inte lösa normalekvationen.

7. (8p) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 = -11 \\ 5x_1 + 3x_2 = 11. \end{cases}$$

OBS. För full poäng måste din lösning innehålla beräkning av alla determinanter som behövs för att använda Cramers regel.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w . Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

(a) Om u och v är ortogonala, och v och w är ortogonala, så är u och w parallella.

(b) Om u och v är ortogonala, så är $-2u$ och $3v$ ortogonala.

(c) Om determinanten

$$\begin{vmatrix} | & | & | & | \\ u & v & u \times v & \\ | & | & | & | \end{vmatrix}$$

är lika med noll, så är u och v parallella.

Lösningar

1. En första förenkling man kan göra är att skriva

$$\sin(2x - 3\pi) = \sin(2x - \pi) = -\sin(\pi - 2x) = -\sin(2x).$$

Jag använder inte den förenklingen här, utan visar hur lösningen går till om vi inte hittar den.

Det gäller generellt att $\sin x = y$ har två separata, oändligt stora, lösningssuppsättningar:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin(y) + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \pi - \arcsin(y) + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Vi har $\arcsin(1/2) = \pi/6$. En uppsättning lösningar ges då av

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3\pi &= \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff 2x_1 &= \frac{\pi}{6} + 3\pi + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff x_1 &= \frac{19\pi}{12} + k \cdot \pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Här kan vi också förenkla lite, genom att svara med $7\pi/12 + k\pi$. Det blir samma mängd lösningar.

Den andra uppsättningen lösningar ges av

$$\begin{aligned} 2x_2 - 3\pi &= \pi - \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff 2x_2 &= \frac{23\pi}{6} + k \cdot 2\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff x_2 &= \frac{23\pi}{12} + k \cdot \pi, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Detta kan förenklas till $11\pi/12 + k\pi$.

Svar: Alla lösningar är av formen $7\pi/12 + k\pi$ eller $11\pi/12 + k\pi$ för $k \in \mathbb{Z}$.

2. Talet $8i$ skrivs på polär form. Eftersom $|8i| = 8$ och $\arg(8i) = \pi/2 + k2\pi$, så är

$$8i = 8e^{i(\pi/2+k2\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Då gäller att

$$\begin{aligned} z^3 &= 8i \\ \iff z^3 &= 8e^{i(\pi/2+k2\pi)}, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff z &= \sqrt[3]{8}e^{i(\pi/6+k2\pi/3)}, & k \in \mathbb{Z} \\ \iff z &= 2e^{i(1+4k)\pi/6}, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vi får tre olika lösningar, för $k = 0, 1, 2$, innan de börjar upprepa sig. Eftersom $\sqrt[3]{8} = 2$ så har vi då

$$\begin{aligned} z_1 &= 2e^{i\pi/6} = 2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \\ z_2 &= 2e^{i5\pi/6} = 2\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + 2i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i, \\ z_3 &= 2e^{i9\pi/6} = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 2i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2i. \end{aligned}$$

3. I (a) tillämpar vi definitionen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 4 \cdot (-2) = 18 + 8 = 26.$$

I (b) utvecklar jag längs första kolonnen:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2(5 \cdot (-2) - 1 \cdot 4) + 2((-1) \cdot 1 - 3 \cdot 5) \\ &= 2 \cdot (-14) + 2 \cdot (-16) \\ &= -60. \end{aligned}$$

4. Skriv upp $[A \mid I]$ och eliminera tills det står $[I \mid A^{-1}]$.

$$\begin{aligned} \{ (b) \leftarrow (b) - 2(a) \} &\iff \begin{bmatrix} 3 & -4 & \mid & 1 & 0 \\ 6 & 1 & \mid & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \{ (a) \leftarrow 9(a) + 4(b) \} &\iff \begin{bmatrix} 3 & -4 & \mid & 1 & 0 \\ 0 & 9 & \mid & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ \{ (a) \leftarrow (a)/27 \text{ och } (b) \leftarrow (b)/9 \} &\iff \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid & 1/27 & 4/27 \\ 0 & 1 & \mid & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Svaret läser vi av som

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/27 & 4/27 \\ -2/9 & 1/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. Låt R vara reflektionspunkten som vi söker. Då är $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ}$, där Q är ortogonalprojektion i ℓ av P . Vi börjar med att hitta $\overrightarrow{PQ}$. Om det känns mest bekvämt kan man

beräkna Q längs vägen, men det behövs egentligen inte så jag hoppar över det i denna lösningen.

Skriv linjen ℓ på normalform, $\ell : 4x - y = 2$, för att kunna läsa av normalen $n = (4, -1)$. Bilda linjen ℓ' som går genom P i riktning n :

$$\ell' : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta stoppas in i ekvationen för ℓ :

$$\begin{aligned} 4(5 + 4t) - (1 - t) &= 2 \\ \iff 17 + 17t &= 0 \\ \iff t &= -1. \end{aligned}$$

Slutsatsen är att $\overrightarrow{PQ} = -n$, så $\overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PQ} = -2n$. Vi får då

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OP} - 2n = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Reflektionen är $R : (-3, 3)$.

6. Koefficientmatrisen och högerledet är

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen är $A^T A x = A^T b$, så vi beräknar (kom ihåg att $A^T A$ alltid är symmetrisk, så du kan spara lite tid)

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 & -3 & -1 \\ -3 & 18 & -19 \\ -1 & -19 & 27 \end{bmatrix}, \\ A^T b &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Normalekvationen är alltså

$$\begin{bmatrix} 18 & -3 & -1 \\ -3 & 18 & -19 \\ -1 & -19 & 27 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Det går även bra att svara på ekvationssystemets form.

7. De matriser som är relevanta för lösningen är

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -11 & 6 \\ 11 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & -11 \\ 5 & 11 \end{bmatrix}.$$

Deras determinanter är

$$\det(A) = 7 \cdot 3 - 6 \cdot 5 = -9,$$

$$\det(A_1) = -11 \cdot 3 - 6 \cdot 11 = -99$$

$$\det(A_2) = 7 \cdot 11 - (-11) \cdot 5 = 132.$$

Vi noterar att $\det(A) \neq 0$, så Cramers regel går att tillämpa. Vi får

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{-99}{-9} = 11,$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{132}{-9} = -\frac{44}{3}.$$

8. (a) **Falskt.** Ett motexempel är $u = (1, 0, 0)$, $v = (0, 1, 0)$, $w = (0, 0, 1)$. Alla exempel där $u \perp v$ och $w = u \times v$ funkar bra.

(b) **Sant.** Algebraiskt kan vi se att

$$(-2u) \cdot (3v) = -6(u \cdot v) = -6 \cdot 0 = 0.$$

Geometriskt kan vi argumentera att $-2u$ och $3v$ är parallella med u respektive v , och detta påverkar inte vinkeln mellan vektorerna.

(c) **Sant.** Om u och v inte är parallella, så spänner de upp ett plan med normal $u \times v$. Normalen tillhör inte planet. Men om determinanten är noll innebär det att u , v och $u \times v$ är linjärt beroende, det vill säga ligger i samma plan. Alltså måste u och v vara parallella.