

## MVE675 — Exempeluppgifter

Antalet stjärnor är ungefär proportionellt mot antal poäng. En stjärna motsvarar cirka 2-3 poäng på tentan, men inga garantier ges i nuläget.

Dokumentet har numera facit. Det absolut bästa sättet att förbereda sig för tentan är att diskutera, förklara och jämföra lösningar med era kurskamrater. Jag uppmuntrar er att *inte* använda någon programvara eller hemsidor för att komma fram till, eller ens kontrollera, svaren. Om ni får olika svar, jämför lösningar och se var era lösningar skiljer sig åt.

Senast uppdaterad: 25 oktober 2022

Ändringar i uppgifter:

- Uppgift 42, står nu rätt värde  $\det(B) = -168$  (stod tidigare 168).
- Uppgift 15, facit: rättat från  $2/3$  till  $2/9$ .

---

### Uppgifter ordnade efter kursens upplägg (del A)

1. ★ Beräkna  $\sin(-2\pi/3)$ .
2. ★★ Hitta alla lösningar  $x \in \mathbb{R}$  till  $\sin(2x + \pi/4) = 1/\sqrt{2}$ .
3. ★ Vilka av följande är lika med  $\sin x$  för alla  $x$ ?

$$\text{(A)} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \quad \text{(B)} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \quad \text{(C)} \cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \quad \text{(D)} \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right)$$

Motivera ditt svar.

4. ★ Beräkna absolutbeloppet av

$$\frac{(1+2i)(2-i)}{1+i}.$$

5. ★ Har ekvationssystemet

$$\begin{cases} |z| = 1 \\ |z - 3i| = 2 \end{cases}$$

några komplexa lösningar  $z$ ? Ange isåfall en lösning.

6. ★★ Skriv på polär form:

$$z = \frac{2+2i}{1+\sqrt{3}i}.$$

7. ★★ Beräkna  $(1 - i)^8$ .

8. ★★ Hitta alla komplexa  $z$  sådana att  $z^3 = 3 + \sqrt{3}i$ .

9. ★ Ange alla (reella och komplexa) nollställen, och deras multiplicitet, för polynomet

$$p(x) = (x - 4)^3(x - \sqrt{2})((x - 1)^2 + 4)^2.$$

10. ★ Låt  $\mathbf{u} = (1, 3)$  och  $\mathbf{v} = (2, -1)$ .

(a) Beräkna  $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$ .

(b) Beräkna  $\|\mathbf{u} - 2\mathbf{v}\|$ .

11. ★ Avgör om  $\mathbf{w} = (4, 3, 1)$  är en linjärkombination av  $\mathbf{u} = (2, 3, 1)$  och  $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$ .

12. ★ Ge ett exempel på tvådimensionella vektorer  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  sådana att

- $\mathbf{w}$  är en linjärkombination av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$ , men
- $\mathbf{v}$  inte är en linjärkombination av  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{w}$ .

13. ★ Antag att  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  är vektorer av samma dimension. Är det alltid sant att  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  och  $\mathbf{u} - \mathbf{v}$  är ortogonala? Motivera ditt svar.

14. ★ Beräkna  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  där  $\mathbf{u} = (3, -2, -5)$  och  $\mathbf{v} = (2, 5, -2)$ . Är  $\mathbf{u}$  och  $\mathbf{v}$  ortogonala?

15. ★★ Hitta ortogonalprojektionen av  $\mathbf{u} = (7, 4, 4)$  på  $\mathbf{v} = (2, -1, -2)$ .

16. ★ Beräkna vektorprodukten  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  där  $\mathbf{u} = (4, 0, 2)$  och  $\mathbf{v} = (-4, -2, 2)$ .

17. ★ Ange en vektor som är ortogonal mot både  $\mathbf{u} = (3, 0, 2)$  och  $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ .

18. ★★ Ett av följande system saknar lösning, ett har exakt en lösning, och ett har oändligt många lösningar. Ange vilket system som har vilket antal lösningar. (Du behöver inte ange lösningarna när de existerar.)

$$(\mathbf{A}) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \\ -2x + y = -2 \end{cases} \quad (\mathbf{B}) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 4 \\ 6x + y = -2 \end{cases} \quad (\mathbf{C}) \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 0 \\ 6x + y = -1 \end{cases}$$

19. ★★ Ange samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ \phantom{x_1} x_2 - 4x_3 = 2 \\ \phantom{x_1} 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

20. ★★ Använd Gausselimination för att reducera ekvationssystemet till trappstegsform:

$$\begin{cases} 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & -x_4 & = & 1 \\ 4x_1 & -5x_2 & -4x_3 & & = & 2 \\ -2x_1 & & +2x_3 & -x_4 & = & 1 \end{cases}$$

21. ★★★ Ange samtliga lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 2 \\ -2x_1 & & +2x_3 & -2x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & -2x_2 & +4x_3 & +2x_4 & = & 4 \\ -x_1 & -x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 2 \end{cases}$$

22. ★ Ange linjen genom  $P : (2, -1, -2)$  och  $Q : (4, 0, 2)$  på parameterform.

23. ★★ Är linjerna  $\ell_1$  och  $\ell_2$ , givna nedan, parallella?

$$\ell_1 : 4x + 3y = 2, \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 6 + 4t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

24. ★ Ange planet genom  $P : (1, 2, 3)$ ,  $Q : (2, 2, 2)$  och  $R : (0, 2, 0)$  på parameterform.

25. ★ Ange en ekvation på parameterform för planet  $\pi : 6x - y + 2z = 2$ .

26. ★★ Ange en ekvation på normalform för planet

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2s + t \\ y = 2t \\ z = 2 + s - t \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

27. ★★ Ange ortogonalprojektionen av  $P : (2, 4)$  på linjen  $\ell : 3x - 2y = 2$ .

28. ★★ Ange ortogonalprojektionen av  $P : (1, 0, 6)$  på planet  $\pi : 2x - y + z = 0$ .

29. ★★★ Vilken punkt i planet  $\pi$ , givet nedan, ligger närmast origo?

$$\pi : \begin{cases} x = 3 + s - t \\ y = 2 + 2s + t \\ z = 1 + s, \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

30. ★★ Hitta arean av triangeln med hörn  $P : (1, 0, 2)$ ,  $Q : (2, 3, 1)$  och  $R : (2, 0, 1)$ .

31. ★★ Beräkna den skalära trippelprodukten  $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$  när  $\mathbf{u} = (2, 0, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$  och  $\mathbf{w} = (1, 2, 3)$ .

### Uppgifter ordnade efter kursens upplägg (del B)

32. ★★ Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Vilken av operationerna  $A(B+C)$  och  $(B+C)A$  är definierad? Vad har resultatet för typ?

(b) Beräkna den av  $A(B+C)$  eller  $(B+C)A$  som är definierad.

33. ★★ Beräkna

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

34. ★★ Välj konstanterna  $a$  och  $b$  så att

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -a & a \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b & 1 \\ b & 2 \end{bmatrix}$$

är varandras inverser.

35. ★ Hitta inversen till

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

36. ★★

(a) Välj konstanterna  $a, b, c$  så att matrisen  $A$  blir ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -a & b \\ 1/\sqrt{3} & 2a & c \\ 1/\sqrt{3} & -a & -b \end{bmatrix}.$$

Det finns flera lösningar, men du behöver bara hitta en.

(b) Ange inversen till  $A$  med de valda konstanterna.

37. ★★ Avgör om vektorerna

$$u_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

är linjärt beroende eller oberoende.

38. \*\*\* Ett experiment genomförs, med följande mätdata:

|     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x$ | -4  | -2  | 0   | 2   | 4   |
| $y$ | 2.8 | 2.6 | 2.0 | 1.6 | 1.0 |

Hitta den linje  $y = kx + m$  som är bäst anpassad efter datan, i minstakvadratmening.

39. \*\* Ange normalekvationen för ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & = & 2 \\ -x_1 & +2x_2 & = & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & = & -1 \\ 5x_1 & -x_2 & = & -3 \end{cases}$$

Du behöver inte lösa normalekvationen.

40. \* Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

41. \* Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

42. \*\* Låt

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & -9 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Beräkna  $\det(A)$ , givet att  $\det(B) = -168$ .

43. \* Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & & +4x_5 & = & 9 \\ 2x_1 & -3x_2 & +x_3 & & +2x_5 & = & -2 \\ x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -4x_4 & +3x_5 & = & 0 \\ -2x_1 & +8x_2 & & & +2x_5 & = & 1 \\ 4x_1 & -3x_2 & +3x_3 & +9x_4 & +x_5 & = & 4 \end{cases}$$

Enligt Cramers regel finns matriser  $M, N$  sådana att om en unik lösning finns, så har den  $x_2 = \det(M)/\det(N)$ . Ange vilka matriserna  $M$  och  $N$  är, utan att beräkna något.

44. ★★ Lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & & -x_3 & = & 2 \end{cases}$$

genom en direkt tillämpning av Cramers regel; din lösning får inte innehålla någon Gausseliminering.

45. ★★ Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

## Svar/Lösningar/Ledningar

1. Vinkeln är i tredje kvadranten. Vi använder  $\sin(-x) = -\sin(x)$  för att få en vinkel i andra kvadranten, sen  $\sin(\pi - x) = \sin x$  för att gå från andra kvadranten till första kvadranten:

$$\begin{aligned}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

2. Vi har

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4},$$

så vi får två uppsättningar av lösningar. Den ena är

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

vilket ger

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi får även

$$\begin{aligned}2x + \frac{\pi}{4} &= \pi - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \\ \iff x &= \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

3. Vi har

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x - 2\pi\right) \\ &= \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sin x.\end{aligned}$$

Samma räkningar skulle visa att  $\cos(3\pi/2 - x) = \sin(-x) \neq \sin x$ . Vi har också

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) &= \cos\left(\frac{5\pi}{2} - x - 2\pi\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ &= \sin x.\end{aligned}$$

Svaret är (B) och (D).

4.

$$\begin{aligned}\left|\frac{(1+2i)(2-i)}{1+i}\right| &= \frac{|1+2i||2-i|}{|1+i|} \\ &= \frac{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{2^2+(-1)^2}}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{5}\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

5. Ekvationen  $|z| = 1$  beskriver en cirkel i det komplexa talplanet med centrum 0 och radie 1, medan  $|z - 3i| = 2$  är en cirkel med centrum  $3i$  och radie 2. Eventuella lösningar till systemet är skärningspunkterna mellan dessa två cirklar. Eftersom avståndet mellan 0 och  $3i$  är 3, så finns endast en skärningspunkt, nämligen  $z = i$ .

Vi kan också lösa det genom en ansättning. Om  $z = x + iy$  med  $x, y \in \mathbb{R}$  får vi  $|z|^2 = x^2 + y^2$  och  $|z - 3i|^2 = x^2 + (y - 3)^2$ . Så en lösning måste uppfylla

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= 1 \\ x^2 + (y - 3)^2 &= 4. \end{cases}$$

Med  $x^2 = 1 - y^2$  insatt in den andra ekvationen, får vi

$$\begin{aligned}1 - y^2 + (y - 3)^2 &= 4 \\ \iff 1 - y^2 + y^2 - 6y + 9 &= 4 \\ \iff 6 &= 6y \\ \iff y &= 1.\end{aligned}$$

Så  $y = 1$ , och  $x^2 = 1 - y^2$  ger  $x = 0$ . Alltså  $z = 0 + i1 = i$ .



6. Använd att  $\arg(z/w) = \arg(z) - \arg(w)$ . Vi har  $\arg(2+2i) = \pi/4$  och  $\arg(1+\sqrt{3}i) = \pi/3$  (rita trianglar), så

$$\arg\left(\frac{2+2i}{1+\sqrt{3}i}\right) = \arg(2+2i) - \arg(1+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{12}.$$

Om du först försöker skriva om  $z$  på rektangulär form lär du inte kunna få fram argumentet, eftersom  $\pi/12$  inte är en vinkel vi är vana vid.

7. På polär form är

$$1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4},$$

så

$$(1-i)^8 = \sqrt{2}^8 e^{-8 \cdot i\pi/4} = 2^4 e^{-i2\pi} = 16.$$

8. Skriv om högerledet på polär form. Vi har

$$|3+\sqrt{3}i| = \sqrt{12}$$

och

$$\arg(3+\sqrt{3}i) = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Så

$$\begin{aligned} z^3 &= \sqrt{12}e^{i(\pi/6+k2\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff z &= \sqrt[6]{12}e^{i(\pi/18+k2\pi/3)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Det finns väsentligen tre lösningar här, motsvarande  $k = 0, 1, 2$ . Vi har ingen chans att förenkla dessa, så svaret är

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{12}e^{i\pi/18}, \\ z_2 &= \sqrt[6]{12}e^{i(\pi/18+2\pi/3)}, \\ z_3 &= \sqrt[6]{12}e^{i(\pi/18+4\pi/3)}. \end{aligned}$$

9. Vi läser direkt av:

- nollstället 4 har multiplicitet 3,
- nollstället  $\sqrt{2}$  har multiplicitet 1.

Polynomet  $(x-1)^2 + 4$  har nollställena  $2 \pm i$ , så

- nollstället  $2+i$  har multiplicitet 2,
- nollstället  $2-i$  har multiplicitet 2.

10. (a)  $2(1, 3) - (2, -1) = (2 \cdot 1 - 2, 2 \cdot 3 - (-1)) = (0, 7).$

(b)  $u - 2v = (-3, 5)$ , så

$$\|u - 2v\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}.$$

11. Vi behöver avgöra om det finns  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  sådana att  $\lambda_1 u + \lambda_2 v = w$ . Denna vektor-  
ekvation blir ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 & -\lambda_2 & = & 4 \\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & = & 3 \\ \lambda_1 & & = & 1 \end{cases}$$

Vi inser snabbt att lösning saknas, så svaret är nej.

12. Till exempel  $u = (1, 0), v = (0, 1)$  och  $w = (1, 0)$ . Poängen är att  $u$  och  $w$  måste vara parallella, medan  $v$  inte är parallell med de andra två.

13. Nej,

$$(u + v) \cdot (u - v) = u \cdot u - u \cdot v + v \cdot u - v \cdot v = \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

Detta är bara 0 om  $u$  och  $v$  har samma längd.

14.  $(3, -2, -5) \cdot (2, 5, -2) = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 + (-5)(-2) = 6$ . Inte ortogonal.

15. Använd projektionsformeln: projektionen  $u'$  ges av

$$\begin{aligned} u' &= \left( \frac{u \cdot v}{v \cdot v} \right) v \\ &= \frac{(7, 4, 4) \cdot (2, -1, -2)}{\|(2, -1, -2)\|^2} (2, -1, -2) \\ &= \frac{2}{9} (2, -1, -2). \end{aligned}$$

16. Formel:

$$\begin{aligned} (4, 0, 2) \times (-4, -2, 2) &= (0 \cdot 2 - 2 \cdot (-2), 2 \cdot (-4) - 4 \cdot 2, 4 \cdot (-2) - 0 \cdot (-2)) \\ &= (4, -16, -8) \\ &= 4(1, -4, -2). \end{aligned}$$

Båda svar godkända. Kontrollera ditt svar genom att kolla att vektorn är ortogonal mot  $(4, 0, 2)$  och  $(-4, -2, 2)$ .

17. Vektorprodukten har den egenskapen:

$$(3, 0, 2) \times (0, 1, 0) = (-2, 0, 3).$$

Det går också att göra genom att sätta upp ett ekvationssystem. Om vektorn är  $(x, y, z)$  så måste detta gälla:

$$\begin{cases} 3x & +2z & = & 0 \\ & y & = & 0 \end{cases}$$

18. (A) har oändligt många lösningar; alla tre ekvationer är ekvivalenta. (B) har exakt en lösning, och (C) saknar lösning.
19. Jag orkar inte lösa/skriva facit till dessa. Kom ihåg att stoppa in din lösning i systemet och kolla så att den stämmer.
20. Jag orkar inte lösa/skriva facit till dessa. Kom ihåg att stoppa in din lösning i systemet och kolla så att den stämmer.
21. Jag tror ni fattar grejen vid det här laget.
22. En riktningsvektor för linjen är  $\overrightarrow{PQ} = (4 - 2, 0 - (-1), 2 - (-2)) = (2, 1, 4)$ . Vi kan utgå från punkten  $P$  och skriva

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -2 + 4t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Det finns oändligt många formuleringar, men alla är av formen  $\overrightarrow{OR} + tv$ , där  $R$  är en punkt på linjen och  $v \neq \vec{0}$  är parallell med  $\overrightarrow{PQ}$ .

23. Det roligaste sättet att lösa uppgiften är att försöka hitta en skärningspunkt genom att stoppa in  $\ell_2$  i ekvationen för  $\ell_1$ . Då får vi

$$\begin{aligned} 4(2 - 3t) + 3(6 + 4t) &= 2 \\ \iff 8 - 12t + 18 + 12t &= 2 \\ \iff 26 &= 2. \end{aligned}$$

Detta saknar lösning, så linjerna skär inte varandra och då måste de vara parallella.

Ett tråkigare sätt är att skriva  $\ell_1$  på parameterform och konstatera att linjernas riktningsvektorer är parallella. Ett halvroligt sätt är att avläsa normalen  $n = (4, 3)$  från  $\ell_1$  och se att den är ortogonal mot riktningsvektorn  $(-3, 4)$  för  $\ell_2$ .

24. Vi tar fram två icke-parallella riktningsvektorer som är parallella med planet, nämligen

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= (1, 0, -1), \\ \overrightarrow{PR} &= (-1, 0, -3). \end{aligned}$$

Planet ges av  $\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$ , alltså

$$\begin{cases} x = 1 + s - t \\ y = 2 \\ z = 3 - s - 3t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

25. Hantera ekvationen  $6x - y + 2z = 2$  som vi gör underbestämda ekvationssystem; sätt  $y = s$  och  $z = t$ . Då får vi  $x = (2 + s - 2t)/6 = 1/3 + s/6 - t/3$ , så

$$\pi : \begin{cases} x = \frac{1}{3} + \frac{s}{6} - \frac{t}{3} \\ y = s \\ z = t, \quad s, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

26. Identifiera riktningsvektorerna  $(-2, 0, 1)$  och  $(1, 2, -1)$  genom att kolla på koefficienterna för  $s$  och  $t$ . En normalvektor för planet är

$$(-2, 0, 1) \times (1, 2, -1) = (-2, -1, -4).$$

Det verkar onödigt att ha så många minustecken, så vi tar  $n = (2, 1, 4)$ . Det finns då ett  $d$  sådant att  $\pi : 2x + y + 4z = d$ . Vi får fram  $d$  genom att stoppa in en punkt från  $\pi$ , och vi kan ta  $P : (1, 0, 2)$ , punkten vi får genom att stoppa in  $s = t = 0$  i parameterformen. Då är alltså

$$d = 2 \cdot 1 + 0 + 4 \cdot 2 = 10.$$

Så  $\pi : 2x + y + 4z = 10$ .

27. Från  $\ell : 3x - 2y = 2$  läser vi av normalvektorn  $n = (3, -2)$ . Linjen  $\ell'$  som går genom  $P$  i riktning  $n$  skrivs på parameterform:

$$\ell' : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Detta stoppas in i ekvationen för  $\ell$ , för att hitta skärningspunkten:

$$\begin{aligned} & 3(2 + 3t) - 2(4 - 2t) = 2 \\ \iff & 6 + 9t - 8 + 4t = 2 \\ \iff & 13t = 4 \\ \iff & t = \frac{4}{13}. \end{aligned}$$

Skärningspunkten  $Q$  ges då av att stoppa in detta  $t$  i ekvationen för  $\ell'$ :

$$Q : \begin{cases} x = 2 + 3\frac{4}{13} = \frac{38}{13} \\ y = 4 - 2\frac{4}{13} = \frac{44}{13}. \end{cases}$$

Svaret är  $Q : (\frac{38}{13}, \frac{44}{13})$ . Det kan vara bra att dubbelkolla att denna ligger på linjen:

$$\begin{aligned} 3\frac{38}{13} - 2\frac{44}{13} &= 2 \\ \iff 114 - 88 &= 26. \end{aligned}$$

Detta är sant.

- 28.** Exakt samma lösningsmetod som förra uppgiften, fast i tre dimensioner. Normalen till  $\pi : 2x - y + z = 0$  är  $n = (2, -1, 1)$ , så vi skapar linjen

$$\ell : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 6 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Stoppa in detta i planets ekvation:

$$\begin{aligned} 2(1 + 2t) - (-t) + (6 + t) &= 0 \\ \iff 8 + 6t &= 0 \\ \iff t &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Då får vi

$$Q : \begin{cases} x = 1 + 2(-3/4) = -1/2 \\ y = -(-3/4) = 3/4 \\ z = 6 + (-3/4) = 21/4. \end{cases}$$

Så  $(-1/2, 3/4, 21/4)$  är svaret.

- 29.** Det är egentligen inte så himla svårt som stjärnorna antyder, det gäller mest att lista ut hur vi överför detta till något vi kan göra. Svaret är att punkten i  $\pi$  som ligger närmast origo, är ortogonalprojektionen av  $(0, 0, 0)$  i  $\pi$ .

Vi behöver också skriva planet på normalform. Identifiera de två riktningsvektorerna  $(1, 2, 1)$  och  $(-1, 1, 0)$  genom att avläsa koefficienterna för  $s$  och  $t$ . En normalvektor för planet ges av

$$n = (1, 2, 1) \times (-1, 1, 0) = (-1, -1, 3).$$

Planets ekvation är då  $\pi : -x - y + 3z = d$  för något  $d$ . Vi får reda på vad  $d$  är genom att stoppa in en punkt i  $\pi$ ; låt oss ta  $(3, 2, 1)$ . Vi har då

$$d = -3 - 2 + 3 \cdot 1 = -2.$$

Så  $\pi : -x - y + 3z = -2$ . Det är tveklöst snyggare att svara med  $\pi : x + y - 3z = 2$ .

Vi fortsätter nu som i de tidigare uppgifterna. Linjen genom origo i riktning  $n$  är

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -3t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Stoppa in det i planets ekvation:

$$\begin{aligned} t + t - 3(-3t) &= 2 \\ \iff t &= \frac{2}{11}. \end{aligned}$$

Då får vi skärningspunkten

$$Q : \begin{cases} x = 2/11 \\ y = 2/11 \\ z = -6/11. \end{cases}$$

Detta är svaret.

**30.** Arealen är

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\vec{PQ} \times \vec{PR}\| &= \frac{1}{2} \|(1, 3, -1) \times (1, 0, -1)\| \\ &= \frac{1}{2} \|(-3, 0, -3)\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{18} \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Om du inte hittar förenklingen i sista steget är det absolut inga problem.

**31.** Vi vet numer att detta är samma som determinanter, så vi kan skriva

$$\begin{aligned} u \cdot (v \times w) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= 6 - 4 + 0 - 0 + 2 - 1 \\ &= 3. \end{aligned}$$

**32. (a)** För att en matrismultiplikation  $MN$  ska vara definierad, måste antalet kolonner i  $M$  vara samma som antalet rader i  $N$ . Eftersom  $B + C$  har typ  $2 \times 2$  och  $A$  har typ  $2 \times 3$ , så är det då  $(B + C)A$  som är definierad.

(b)

$$\begin{aligned} \left( \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 15 & 11 \\ 6 & 11 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

33.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (3,0,2) \cdot (1,-1,3) & (3,0,2) \cdot (2,4,0) \\ (1,-1,0) \cdot (1,-1,3) & (1,-1,0) \cdot (2,4,0) \\ (2,1,0) \cdot (1,-1,3) & (2,1,0) \cdot (2,4,0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 2 & -2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

34.  $A$  och  $B$  är varandras inverser om och endast om  $AB = BA = I$ , där  $I$  är identitetsmatrisen. Vi ska alltså ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 1 \\ b & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vi ser att  $a = b = 1$ . Det ger  $AB = I$ , och då måste även  $BA = I$  gälla.

35. Detta löser vi genom Gausseliminering. Vi skriver  $[A \mid I]$  och Gausseliminerar tills det står  $[I \mid A^{-1}]$ .

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 2 & 6 & \mid & 1 & 0 \\ 0 & -4 & \mid & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left\{ (a) \leftarrow (a) + \frac{3}{2}(b) \right\} &\sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & \mid & 1 & 3/2 \\ 0 & -4 & \mid & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \left\{ (a) \leftarrow \frac{1}{2}(a) \text{ och } (b) \leftarrow -\frac{1}{4}(b) \right\} &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mid & 1/2 & 3/4 \\ 0 & 1 & \mid & 0 & -1/4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Svaret är

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Lösningen kan testas geom att bekräfta att  $AA^{-1} = I$ .

- 36. (a)** Matrisen är ortogonal om alla kolonnvektorer är parvis ortogonala och har längd 1. Vi får ett ekvationssystem

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cdot (-a, 2a, -a) = 0 \\ (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cdot (b, c, -b) = 0 \\ (-a, 2a, -a) \cdot (b, c, -b) = 0 \\ \sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{3})^2} = 1 \\ \sqrt{(-a)^2 + (2a)^2 + (-a)^2} = 1 \\ \sqrt{b^2 + c^2 + (-b)^2} = 1 \\ 0 = 0 \\ c = 0 \\ 2ac = 0 \\ 1 = 1 \\ \sqrt{6a^2} = 1 \\ \sqrt{2b^2 + c^2} = 1. \end{cases}$$

Här ser vi att  $c = 0$ ,  $|a| = 1/\sqrt{6}$ , och sista ekvationen ger  $|b| = 1/\sqrt{2}$ . Vi kan till exempel välja  $a = 1/\sqrt{6}$ ,  $b = 1/\sqrt{2}$  och  $c = 0$ . Vi får

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

- (b)** Med de valda konstanterna är matrisen ortogonal, så

$$A^{-1} = A^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

- 37.** Vi avgör om vektorekvationen  $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \vec{0}$  har några lösningar. Detta ger



ett ekvationssystem som Gausselimineras:

$$\begin{aligned} \{(c) \leftarrow 2(c) - (a)\} &\iff \begin{cases} 4\lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ -\lambda_1 & +3\lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ 2\lambda_1 & +\lambda_2 & +3\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \end{cases} \\ \{(d) \leftarrow (d) - (c)\} &\iff \begin{cases} 4\lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ -\lambda_1 & +3\lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +6\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +2\lambda_3 & = 0 \end{cases} \\ \{(d) \leftarrow (d) - (c)\} &\iff \begin{cases} 4\lambda_1 & +\lambda_2 & & = 0 \\ -\lambda_1 & +3\lambda_2 & -2\lambda_3 & = 0 \\ & \lambda_2 & +6\lambda_3 & = 0 \\ & & -4\lambda_3 & = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Detta har uppenbarligen bara en lösning, nämligen  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ . Slutsatsen är att vektorerna är linjärt oberoende.

- 38.** Vi ställer upp det ekvationssystem som linjen  $\ell : y = kx + m$  skulle uppfylla om den uppfyllde alla värdena. På matrisform är det

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8 \\ 2.6 \\ 2.0 \\ 1.6 \\ 1.0 \end{bmatrix}.$$

Låt  $A$  vara koefficientmatrisen och  $b$  vara högerledet. Normalekvationen är

$$A^T A \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = A^T b.$$

Vi behöver beräkna  $A^T A$  och  $A^T b$ .

$$A^T A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.8 \\ 2.6 \\ 2.0 \\ 1.6 \\ 1.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9.2 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen säger då direkt att  $40k = -9.2$  och  $5m = 10$ , så vi löser ut  $k = -9.2/40$  och  $m = 2$ .

Svar:  $y = -\frac{9.2}{40}x + 2$ . Behöver inte förenklas.

**39.** Koefficientmatrisen  $A$  och högerledet  $b$  ges av

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix}.$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen är då

$$\begin{bmatrix} 39 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Det går också bra att svara på ekvationssystemform

$$\begin{cases} 39x_1 - 8x_2 = -14 \\ -8x_1 + 7x_2 = 6. \end{cases}$$

**40.**

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - (-1)(-2) = 6.$$

**41.**

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} &= 2 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (-1) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot (-4) - 1 \cdot 0 \cdot 1 \\ &= 0 + 24 - 3 - 4 + 8 - 0 \\ &= 25. \end{aligned}$$

**42.** Uppgiften testar följande principer:

$$\begin{vmatrix} | & | & | \\ a_1 & \lambda a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ | & | & | \end{vmatrix},$$

och samma sak för rader, samt att determinantens tecken byts när vi byter plats på två rader eller kolonner. Så,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 6 & -9 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & -3 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{3}{2} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{3}{2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{3}{2} \det(B) = -\frac{3}{2} \cdot (-168) = 3 \cdot 84 = 252. \end{aligned}$$

**43.** Matrisen  $N$  är helt enkelt koefficientmatrisen

$$N = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -3 & -4 & 3 \\ -2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrisen  $M$  får vi genom att byta ut den andra kolonnen i  $N$  mot ekvationssystemets högerled:

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 9 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

44. Koefficientmatrisen är

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Enligt Cramers regel är

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)},$$

förutsatt att  $\det(A) \neq 0$ , där  $A_i$  är matrisen vi får genom att ersätta kolonn  $i$  i  $A$  med högerledet. Först och främst har vi

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot (-3) \cdot 0 + (-1)(-3) \cdot 3 - (-1) \cdot 5 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 \cdot 0 - 4 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= -4 - 0 + 9 - 5 + 0 - 24 \\ &= -24. \end{aligned}$$

Regeln går att tillämpa. Vi beräknar på samma sätt

$$\begin{aligned} \det(A_1) &= \begin{vmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -10 - 0 + 6 - 1 + 0 - 16 = -21, \\ \det(A_2) &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 45 + 25 + 40 - 12 = 18, \\ \det(A_3) &= \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 - 3 + 10 + 0 - 30 = -15. \end{aligned}$$

Svaret är då

$$x_1 = \frac{-21}{-24} = \frac{7}{8}, \quad x_2 = \frac{18}{-24} = -\frac{3}{4}, \quad x_3 = \frac{-15}{-24} = \frac{5}{8}.$$

45. Alla rader/kolonner har lika många nollor, så vi väljer att utveckla efter första raden:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Dessa två determinanter är inte så svåra att beräkna, vi måste bara vara försiktiga med tecken så tar det lugnt. Den första utvecklas efter tredje raden (och  $3 \times 3$ -determinanten vi får utvecklas efter första raden):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

På liknande sätt har vi (sista raden följt av andra raden)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Då är alltså

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 + (-1) = -2.$$