MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen

Datum: 2022–10–27 EM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

MVE675 – Algebra

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.
20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. (4p) Beräkna $\tan(5\pi/4)$.

2. (5p) Ange alla komplexa tal z sådana att $z^4 = -1$.

Anm. Svar på rektangulär form ger full poäng, svar på polär form ger 4p.

3. (5p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

4. (4p) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ange inversen A^{-1}, eller visa att den inte existerar.

5. (6p) Beräkna avståndet från punkten $P : (6, -2, 5)$ till planet $\pi : 2x - y + 2z = 6$.

6. (5+2p) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & = & 2. \end{cases}$$

(a) Formulera normalekvationen för minstakvadratlösning av systemet.

(b) Hitta en minstakvadratlösning till systemet.

7. (6+3p) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} \begin{array}{rrrcl} 6x_1 & +18x_2 & -12x_3 & = & -11 \\ 3x_1 & -9x_2 & +x_3 & = & 13 \\ -26x_1 & +39x_2 & +13x_3 & = & 7. \end{array} \end{cases}$$

(a) Avgör om $\det(A) = 0$ eller $\det(A) \neq 0$. Vilken av dessa behöver gälla för att systemet ska ha en unik lösning?

(b) Enligt Cramers regel ges den unika lösningen, om den finns, av

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}.$$

Ange vilka de tre matriserna A_1, A_2, A_3 är. Du behöver inte beräkna determinanterna.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w. Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

(a) Om u är en linjärkombination av v och w, så är v en linjärkombination av u och w.

(b) $u + v$ är ortogonal mot $u \times v$.

(c) Vektorerna $u - v, v - w, w - u$ är linjärt beroende.