MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen

Datum: 2022–10–27 EM
Examinator: Tony Johansson (ankn 1069)

MVE675 – Algebra

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.
20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. (4p) Beräkna $\tan(5\pi/4)$.

2. (5p) Ange alla komplexa tal z sådana att $z^4 = -1$.

Anm. Svar på rektangulär form ger full poäng, svar på polär form ger 4p.

3. (5p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

4. (4p) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ange inversen A^{-1}, eller visa att den inte existerar.

5. (6p) Beräkna avståndet från punkten $P : (6, -2, 5)$ till planet $\pi : 2x - y + 2z = 6$.

6. (5+2p) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & -2x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & +x_2 & = & 5 \\ x_1 & -2x_2 & = & 2. \end{cases}$$

(a) Formulera normalekvationen för minstakvadratlösning av systemet.

(b) Hitta en minstakvadratlösning till systemet.

7. (6+3p) Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} 6x_1 & +18x_2 & -12x_3 & = & -11 \\ 3x_1 & -9x_2 & +x_3 & = & 13 \\ -26x_1 & +39x_2 & +13x_3 & = & 7. \end{cases}$$

(a) Avgör om $\det(A) = 0$ eller $\det(A) \neq 0$. Vilken av dessa behöver gälla för att systemet ska ha en unik lösning?

(b) Enligt Cramers regel ges den unika lösningen, om den finns, av

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)}.$$

Ange vilka de tre matriserna A_1, A_2, A_3 är. Du behöver inte beräkna determinanterna.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w. Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

(a) Om u är en linjärkombination av v och w, så är v en linjärkombination av u och w.

(b) $u + v$ är ortogonal mot $u \times v$.

(c) Vektorerna $u - v, v - w, w - u$ är linjärt beroende.

Lösningar

1. Vinkeln $\theta = 5\pi/4 = \pi + \pi/4$ är i tredje kvadranten. Om vi ritar en triangel med hörn i $(0,0)$, $(\cos\theta, 0)$ och $(\cos\theta, \sin\theta)$, så ser vi att det är standardtriangeln där två av vinklarna är $\pi/4$. I denna har de två kateterna samma längd. Kateternas längd är $-\cos\theta$ och $-\sin\theta$ (eftersom vi är i tredje kvadranten), så

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = 1.$$

Svar: $\tan(5\pi/4) = 1$.

2. Vi har $|-1| = 1$ och $\arg(-1) = \pi + k\cdot 2\pi$, så på polär form är

$$-1 = e^{i(\pi + k2\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Vi har då

$$\begin{aligned} & z^4 = -1 \\ \iff \quad & z^4 = e^{i(\pi+k2\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \iff \quad & z = e^{i(\pi/4 + k\pi/2)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vi får fyra olika lösningar, motsvarande $k = 0, 1, 2, 3$. Övriga k ger lösningar som är hela varv från dessa, och därför sammanfaller. Lösningarna är då

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{i\pi/4} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \\ z_2 &= e^{i3\pi/4} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}, \\ z_3 &= e^{i5\pi/4} = \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}, \\ z_4 &= e^{i7\pi/4} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

3. Jag börjar med att bryta ut en faktor 3 från tredje raden, och en faktor 2 från fjärde raden. Sen utvecklar jag efter andra raden:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} &= 6 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 6 \left(-1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

De två 3×3-determinanterna kan också beräknas genom utveckling, längs tredje respektive första kolonnen:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(0 \cdot 1 - 1 \cdot 2) = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3(2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -3.$$

Sammanfattningsvis är då

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 6(-1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-3)) = 6 \cdot 1 = 6.$$

4. Vi skriver $[A \mid I]$ och eliminerar tills det står $[I \mid A^{-1}]$:

$$\begin{aligned}
& & \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\{(b) \leftarrow (b) - 3(a)\} & \iff & \left[\begin{array}{rr|rr} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
\{(a) \leftarrow 5(a) + (b)\} & \iff & \left[\begin{array}{rr|rr} 10 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right] \\
\{(a) \leftarrow (a)/10 \text{ och } (b) \leftarrow (b)/5\} & \iff & \left[\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 1 & -3/5 & 1/5 \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Inversen är då

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -3/5 & 1/5 \end{bmatrix} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Avståndet ges av $\|\overrightarrow{PQ}\|$, där Q är ortogonalprojektionen av P i π. En normal till π avläses som $n = (2, -1, 2)$. Linjen genom P i riktning n är då $\overrightarrow{OP} + tn$, alltså

$$\ell : \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 5 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Detta stoppas in i planets ekvation:

$$\begin{aligned}
& 2(6 + 2t) - (-2 - t) + 2(5 + 2t) = 6 \\
\iff & 24 + 9t = 6 \\
\iff & 9t = -18 \\
\iff & t = -2.
\end{aligned}$$

Vi kan nu hitta Q genom att stoppa in t, men vi kan mer direkt se att $\overrightarrow{PQ} = tn = -2(2, -1, 2)$. (Om du tar fram Q kommer du få samma resultat.) Då är avståndet

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \|tn\| = |t|\|n\| = 2\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 6.$$

Alternativ lösning. Låt P_0 vara någon punkt i pllanet, exempelvis $P_0 : (3, 0, 0)$. Då ges $\overrightarrow{QP}$ av ortogonalprojektionen av $\overrightarrow{P_0P}$ på n, alltså

$$\overrightarrow{QP} = \frac{\overrightarrow{P_0P} \cdot n}{n \cdot n} n.$$

Längden är då

$$\|\overrightarrow{QP}\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot n|}{\|n\|^2} \|n\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \cdot n|}{\|n\|}.$$

6. Koefficientmatrisen A och högerledet b ges av

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen är $A^T Ax = A^T b$, så vi beräknar

$$A^T A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen är

$$\begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -1 \end{bmatrix},$$

eller

$$\begin{cases} 9x_1 & -4x_2 & = & 14 \\ -4x_1 & +9x_2 & = & -1. \end{cases}$$

Någon av dessa ska anges som svar i **(a)**.

För att lösa normalekvationen skriver vi

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 9x_1 & -4x_2 & = & 14 \\ -4x_1 & +9x_2 & = & -1 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 36x_1 & -16x_2 & = & 56 \\ -36x_1 & +81x_2 & = & -9 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 36x_1 & -16x_2 & = & 56 \\ & 65x_2 & = & 47 \end{cases} \end{aligned}$$

Då får vi $x_2 = 47/65$. Från första ekvationen har vi då

$$x_1 = \frac{4x_2 + 14}{9} = \frac{4 \cdot 47}{9 \cdot 65} + \frac{14}{9} = \frac{122}{65}.$$

Förenklingen i sista steget behöver inte göras. (Misstag i formuleringen av uppgiften ledde till komplicerat svar.)

Svar: $(x_1, x_2) = (122/65, 47/65)$.

7. **(a)** Koefficientmatrisen är

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & -9 & 1 \\ -26 & 39 & 13 \end{bmatrix}.$$

Eftersom vi bara är intresserade av huruvida $\det(A) = 0$, så kan vi bryta ut faktorn 13 från sista raden (och 6 från första raden, samt 3 från andra kolonnen) utan att det påverkar svaret. På så sätt slipper vi göra stora multiplikationer. Vi har alltså

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & -9 & 1 \\ -26 & 39 & 13 \end{vmatrix} &= 13 \begin{vmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & -9 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 13 \cdot 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -9 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 13 \cdot 6 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Vi struntar alltså i faktorerna framför determinanterna, och beräknar

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-3) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 1 \cdot 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 1 - (-2)(-3)(-2) \\ &= -3 - 1 - 2 - 3 - 6 + 12 = -3. \end{aligned}$$

Svaret är att $\det(A) \neq 0$, och det medför att systemet har en unik lösning.

(b) Matriserna får vi genom att ersätta kolonnerna i A med högerledet för systemet, alltså

$$A_1 = \begin{bmatrix} -11 & 18 & -12 \\ 13 & -9 & 1 \\ 7 & 39 & 13 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -11 & -12 \\ 3 & 13 & 1 \\ -26 & 7 & 13 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 6 & 18 & -11 \\ 3 & -9 & 13 \\ -26 & 39 & 7 \end{bmatrix}.$$

8. (a) Falskt. Motexempel $u = (1,0,0), v = (0,1,0), w = (1,0,0)$, eller vilka vektorer som helst där u och w är parallella medan v inte är parallell med de andra två.

(b) Sant. Vi vet att u och v individuellt är ortogonala mot $u \times v$, och eftersom skalärprodukten är distributiv gäller att

$$(u+v) \cdot (u \times v) = u \cdot (u \times v) + v \cdot (u \times v) = 0 + 0 = 0.$$

Geometriskt kan vi argumentera att $u + v$ ligger i planet som spänns upp av u och v, och detta planet har normal $u \times v$.

(c) Sant. Algebraiskt ser vi att

$$(u-v) + (v-w) + (w-u) = \vec{0},$$

och detta visar att det finns en icke-trivial lösning till ekvationen $\lambda_1(u-v) + \lambda_2(v-w) + \lambda_3(w-u) = \vec{0}$, nämligen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Vi kan kolla på determinanten och addera första kolonnen till den andra:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} | & | & | \\ u-v & v-w & w-u \\ | & | & | \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} | & | & | \\ u-v & v-w+(u-v) & w-u \\ | & | & | \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} | & | & | \\ u-v & u-w & w-u \\ | & | & | \end{vmatrix} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

eftersom $u-w$ och $w-u$ är parallella. Eftersom determinanten är 0, så är vektorerna linjärt beroende.

Geometriskt kan vi tänka såhär: rita de tre vektorerna u, v, w med bas i origo. Låt P, Q, R vara punkterna vid spetsarna, alltså $\overrightarrow{OP} = u$, $\overrightarrow{OQ} = v, \overrightarrow{OR} = w$. Då är $u - v = \overrightarrow{QP}$, $v - w = \overrightarrow{RQ}$, $w - u = \overrightarrow{PR}$. De tre vektorerna $\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{PR}$ ligger alla i det plan som spänns upp av P, Q, R.