

MVE675 – Algebra

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.

20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

1. (5p) Beräkna $\sin \theta$, givet att $\tan \theta = 2$ och $0 < \theta < \pi/2$.

2. (5p) Beräkna absolutbeloppet av

$$z = \frac{(1-i)}{(3+4i)(3+3i)}.$$

3. (4p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4. (6p) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ange inversen A^{-1} , eller visa att den inte existerar.

5. (4p) De två planen $\pi_1 : 2x - y + 3z = 4$ och $\pi_2 : x - 2y + 4z = 0$ skär varandra i en linje ℓ . Ange en ekvation för ℓ .

6. (2+4+2p) I ett experiment mäts följande värden för två beroende variabler x och y :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1.3 & 2.4 & 2.3 \end{array}$$

Hitta den linje ℓ som är bäst anpassad efter datan i minstakvadratmening, via följande steg:

- (a) Formulera ett ekvationssystem vars eventuella lösning ger en linje genom punkterna.
- (b) Formulera normalekvationen för systemet.
- (c) Lös normalekvationen och ange linjen ℓ .

7. (8p) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + 19x_2 = -11 \\ 2x_1 + 13x_2 = 11. \end{cases}$$

OBS. För full poäng måste din lösning innehålla beräkning av alla determinanter som behövs för att använda Cramers regel.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w . Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

- (a) Om u är ortogonal mot både v och w , så är u och $v \times w$ parallella.
- (b) Vektorerna $u + v$ och $u - v$ är ortogonala.
- (c) Om u och v inte är parallella, så finns skalärer x_1, x_2, x_3 sådana att

$$w = x_1u + x_2v + x_3(u \times v).$$