

MVE675 – Algebra

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.

20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

1. (5p) Beräkna $\sin \theta$, givet att $\tan \theta = 2$ och $0 < \theta < \pi/2$.

2. (5p) Beräkna absolutbeloppet av

$$z = \frac{(1-i)}{(3+4i)(3+3i)}.$$

3. (4p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

4. (6p) Låt

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ange inversen A^{-1} , eller visa att den inte existerar.

5. (4p) De två planen $\pi_1 : 2x - y + 3z = 4$ och $\pi_2 : x - 2y + 4z = 0$ skär varandra i en linje ℓ . Ange en ekvation för ℓ .

6. (2+4+2p) I ett experiment mäts följande värden för två beroende variabler x och y :

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1.3 & 2.4 & 2.3 \end{array}$$

Hitta den linje ℓ som är bäst anpassad efter datan i minstakvadratmening, via följande steg:

- (a) Formulera ett ekvationssystem vars eventuella lösning ger en linje genom punkterna.
- (b) Formulera normalekvationen för systemet.
- (c) Lös normalekvationen och ange linjen ℓ .

7. (8p) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 + 19x_2 = -11 \\ 2x_1 + 13x_2 = 11. \end{cases}$$

OBS. För full poäng måste din lösning innehålla beräkning av alla determinanter som behövs för att använda Cramers regel.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w . Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

- (a) Om u är ortogonal mot både v och w , så är u och $v \times w$ parallella.
- (b) Vektorerna $u + v$ och $u - v$ är ortogonala.
- (c) Om u och v inte är parallella, så finns skalärer x_1, x_2, x_3 sådana att

$$w = x_1u + x_2v + x_3(u \times v).$$

Lösningar

1. Vi har att

$$\begin{aligned}\tan \theta = 2 &\iff \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2 \\ &\iff \sin \theta = 2 \cos \theta \\ &\implies \sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Trigonometriska ettan $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ ger då

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta = 4 \cos^2 \theta &\iff \sin^2 \theta = 4(1 - \sin^2 \theta) \\ &\iff 5 \sin^2 \theta = 4 \\ &\iff \sin^2 \theta = \frac{4}{5}.\end{aligned}$$

I första kvadranten gäller att $\sin \theta > 0$, så vi har då $\sin \theta = \sqrt{4/5} = 2/\sqrt{5}$.

2. Vi har

$$\begin{aligned}|z| &= \frac{|1 - i|}{|3 + 4i||3 + 3i|} \\ &= \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{3^2 + 3^2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{25 \cdot 18}} \\ &= \frac{1}{15}.\end{aligned}$$

3. Först kan vi faktorisera ut 4 från första raden, sen 2 från första kolonnen (inte nödvändigt, men det underlättar). Efter det använder vi definitionen av determinant:

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix} 8 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 8(1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 0 + (-1)(-1)(-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot (-1)) \\ &= 8(3 - 0 - 1 + 2 + 0 + 3) = 56.\end{aligned}$$

4. Vi skriver $[A \mid I]$ och eliminerar tills det står $[I \mid A^{-1}]$.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} (b) \leftarrow (b) - 3(a) \\ (c) \leftarrow (c) - 2(a) \end{array} \right\} \iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \left\{ \begin{array}{l} (b) \leftarrow (b) + (c) \\ (a) \leftarrow (a) - (c) \end{array} \right\} \iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \{ (a) \leftarrow ((a) + (b))/2 \} \iff \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Vi läser av

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Detta handlar helt enkelt om att lösa ekvationssystemet

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 4 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{array} \right. \\ \{ (b) \leftarrow 2(b) - (a) \} & \iff \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 4 \\ 0 - 3y + 5z = -4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Sätt $z = t$, och lös ut

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(5z + 4) \\ &= \frac{1}{3}(5t + 4) \\ x &= \frac{1}{2}(4 - 3z + y) \\ &= 2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{6}(5t + 4) \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}t. \end{aligned}$$

Ett svar är då

$$\ell : \begin{cases} x = (8 - 2t)/3 \\ y = (4 + 5t)/3 \\ z = t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

6. (a) Ekvationssystemet vi söker har obekanta k och m (för linjens ekvation $y = kx + m$), och ges av

$$\begin{cases} m &= 1.3 \\ k + m &= 2.4 \\ 2k + m &= 2.3. \end{cases}$$

- (b) Definiera

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.3 \\ 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix}.$$

Då är

$$A^T A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix},$$
$$A^T b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.3 \\ 2.4 \\ 2.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Normalekvationen är då

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- (c) Om allt är rätt utfört är det inte så svårt att lösa normalekvationen med sin favoritmetod, och få fram $k = 1/2$ och $m = 3/2$. Linjen är då $\ell : y = (3 + x)/2$.

7. De relevanta matriserna är

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 19 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} -11 & 19 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}.$$

Determinanterna beräknas:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 19 \\ 2 & 13 \end{vmatrix} = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 19 = 1,$$
$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -11 & 19 \\ 11 & 13 \end{vmatrix} = 11(-1 \cdot 13 - 19 \cdot 1) = -32 \cdot 11 = -352,$$
$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11(3 \cdot 1 - (-1) \cdot 2) = 55.$$

Eftersom $\det(A) \neq 0$ har systemet en unik lösning, och Cramers regel ger

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = -352,$$
$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 55.$$

8. (a) **Sant.** Om v och w inte är parallella, så spänner de upp ett plan, och alla normaler till ett plan (bl.a. u och $v \times w$) är parallella. Om v och w är parallella så är $v \times w = \vec{0}$, och nollvektorn är parallell med alla vektorer.
- (b) **Falskt.** Vi har $(u+v) \cdot (u-v) = \|u\|^2 - \|v\|^2$, så det räcker att ange två vektorer av olika längd för att hitta ett motexempel.
- (c) **Sant.** Vektorerna $u, v, u \times v$ är linjärt oberoende, eftersom de inte ligger i samma plan. Då spänner de tre vektorerna upp hela rummet, och w är en linjärkombination av de tre. Algebraiskt kan vi säga att $Ax = w$ har en unik lösning, där

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u & v & u \times v \\ | & | & | \end{bmatrix},$$

eftersom de tre kolonnvektorerna är linjärt oberoende.