MVE675 — Algebra
Tentamen

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.
20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. (5p) Hitta alla lösningar x med $-\pi < x \leq \pi$ till

$$\cos(\pi/6 - 2x) = \frac{1}{2}.$$

2. (4p) Lös den komplexa ekvationen $(2+i)z - (2+\overline{z})i = 4$.

3. (5p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Tips: Gausseliminering kan användas för att förenkla determinanter.

4. (2+2+2p) Avgör invers, eller visa att invers saknas, för följande matriser.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

5. (6p) Ortogonalprojektionen av punkten $P : (5, -2, 3)$ i ett plan π är $Q : (1, 0, 4)$. Ange en ekvation för planet π.

6. (6p) Hitta en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

7. (8p) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

OBS. För full poäng måste din lösning innehålla beräkning av alla determinanter som behövs för att använda Cramers regel.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w. Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

(a) Vektorerna $u + v, u + 2v$ och $2u + v$ är linjärt beroende.

(b) Vektorn $u - (u \cdot v)v$ är ortogonal mot v.

(c) Om determinanten

$$\begin{vmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{vmatrix}$$

är lika med noll, så är w en linjärkombination av u och v.