Matematiska Vetenskaper 2023–08–23 EM
Chalmers Tekniska Högskola Examinator: Tony Johansson (1069)

MVE675 — Algebra
Tentamen

Totalt 50 poäng. Till poängen på tentamen adderas dina bonuspoäng i efterhand.
20p ger trea, 30p ger fyra, 40p ger femma.

Uppgifterna är inte ordnade i svårighetsgrad.

Inga hjälpmedel tillåtna. Motivera dina svar väl.

---

1. (5p) Hitta alla lösningar x med $-\pi < x \leq \pi$ till

$$\cos(\pi/6 - 2x) = \frac{1}{2}.$$

2. (4p) Lös den komplexa ekvationen $(2+i)z - (2+\overline{z})i = 4$.

3. (5p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Tips: Gausseliminering kan användas för att förenkla determinanter.

4. (2+2+2p) Avgör invers, eller visa att invers saknas, för följande matriser.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

5. (6p) Ortogonalprojektionen av punkten $P : (5,-2,3)$ i ett plan π är $Q : (1,0,4)$. Ange en ekvation för planet π.

6. (6p) Hitta en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

7. (8p) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

OBS. För full poäng måste din lösning innehålla beräkning av alla determinanter som behövs för att använda Cramers regel.

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w. Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

(a) Vektorerna $u + v, u + 2v$ och $2u + v$ är linjärt beroende.

(b) Vektorn $u - (u \cdot v)v$ är ortogonal mot v.

(c) Om determinanten

$$\begin{vmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{vmatrix}$$

är lika med noll, så är w en linjärkombination av u och v.

Lösningar

1. (5p) Hitta alla lösningar x med $-\pi < x \leq \pi$ till

$$\cos(\pi/6 - 2x) = \frac{1}{2}.$$

Lösning. Vi har generellt att

$$\cos x = y \Longleftrightarrow x = \pm \arccos y + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Eftersom $\arccos(1/2) = \pi/3$, så har vi då

$$\begin{aligned} &\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow &\frac{\pi}{6} - 2x = \pm\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Vi får två olika grupper av lösningar, en för plustecknet och en för minustecknet. Plustecknet ger

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Longleftrightarrow &x = -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

De två lösningar som faller i intervallet $-\pi < x \leq \pi$ är $-\pi/12$ och $\pi - \pi/12 = 11\pi/12$.

Minustecknet ger

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{6} - 2x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Longleftrightarrow &x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Här får vi lösningar $\pi/2$ och $-\pi/2$ i det relevanta intervallet.

Svar: $-\pi/2, -\pi/12, \pi/2, 11\pi/12$.

2. (4p) Lös den komplexa ekvationen $(2+i)z - (2+\overline{z})i = 4$.

Lösning. Ansätt $z = x + yi$ med $x, y \in \mathbb{R}$. Då är

$$\begin{aligned} &(2+i)z - (2+\overline{z})i = 4 \\ \Longleftrightarrow &(2+i)(x+yi) - (2+x-yi)i = 4 \\ \Longleftrightarrow &2x + 2yi + xi + yi^2 - 2i - xi + yi^2 = 4 \\ \Longleftrightarrow &2x + 2yi + xi - y - 2i - xi - y = 4 \\ \Longleftrightarrow &(2x - 2y) + (2y - 2)i = 4. \end{aligned}$$

Genom att identifiera real-och imaginärdelar får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x & -2y & = & 4 \\ & 2y & = & 2 \end{cases}$$

med entydig lösning $x = 3, y = 1$. Svaret är då $z = 3 + i$.

3. (5p) Beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Tips: Gausseliminering kan användas för att förenkla determinanter.

Lösning. Om vi adderar en multipel av en rad till en annan så förändras inte determinanten. Genom att subtrahera första raden från fjärde och femte får vi då

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & -2 & 3 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Determinanten av en triangulär matris är produkten av diagonalelementen, så determinanten är

$$5(-3)(-2) \cdot 2 \cdot 3 = 180.$$

4. (2+2+2p) Avgör invers, eller visa att invers saknas, för följande matriser.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} a & -a \\ a & a \end{bmatrix}, \quad a \neq 0.$$

Lösning. Strategin är att skriva $[A \mid I]$ och eliminera tills det står $[I \mid A^{-1}]$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/2 & 1 \end{array}\right].$$

Här har vi fått en nollrad, och slutsatsen är att A ej är inverterbar.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \{(b) \leftarrow 3(b) - 2(a)\} \sim & \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \\ \{(a) \leftarrow 4(a) - (b)\} & \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \end{array}\right] \\ \{(a) \leftarrow (a)/12 \text{ och } (b) \leftarrow (b)/4\} \sim & \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3/4 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Så

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ -1/2 & 3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Slutligen, anta att $a \neq 0$. Då är

$$\begin{aligned}
&\left[\begin{array}{cc|cc} a & -a & 1 & 0 \\ a & a & 0 & 1 \end{array}\right] \\
\{(b) \leftarrow (b) - (a)\} \sim &\left[\begin{array}{cc|cc} a & -a & 1 & 0 \\ 0 & 2a & -1 & 1 \end{array}\right] \\
\{(a) \leftarrow 2(a) + (b)\} \sim &\left[\begin{array}{cc|cc} 2a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2a & -1 & 1 \end{array}\right] \\
\{(a) \leftarrow (a)/2a \text{ och } (b) \leftarrow (b)/2a\} \sim &\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2a & 1/2a \\ 0 & 1 & -1/2a & 1/2a \end{array}\right].
\end{aligned}$$

Så

$$C^{-1} = \frac{1}{2a}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Det kan underlätta att bryta ut a från början.

5. (6p) Ortogonalprojektionen av punkten $P : (5, -2, 3)$ i ett plan π är $Q : (1, 0, 4)$. Ange en ekvation för planet π.

Lösning. En normal för planet π är $n = \overrightarrow{QP} = (4, -2, -1)$, så planets ekvation är $\pi : 4x - 2y - z = d$ för något d. Eftersom $Q \in \pi$, så måste vi då ha

$$d = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 1 \cdot 4 = 0.$$

Det följer att $\pi : 4x - 2y - z = 0$.

6. (6p) Hitta en minstakvadratlösning till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & -y & = & 2 \\ x & & = & 4 \\ x & +y & = & 5 \end{cases}$$

Lösning. Koefficientmatrisen A och högerledet b ges av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

För att få fram normalekvationen $A^T Ax = A^T b$ beräknar vi

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Normalekvationen är då

$$\begin{cases} 3x & & = & 11 \\ & 2y & = & 3 \end{cases}$$

med lösning $(x, y) = (11/3, 3/2)$. Detta är minstakvadratlösningen.

7. (8p) Använd Cramers regel för att lösa ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ 3x_1 & -x_2 & & = & -1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 1 \end{cases}$$

OBS. För full poäng måste din lösning innehålla beräkning av alla determinanter som behövs för att använda Cramers regel.

Lösning. De relevanta matriserna (koefficientmatrisen, samt en matris för varje kolonn utbytt till högerledet) är

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinanterna beräknas (vi börjar med A, för om den är 0 går Cramers regel inte att tillämpa):

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \cdot 2 - (-1)(-1) \cdot 1 \\ &= 2 - 0 + 0 + 3 - 6 - 1 = -2, \\ \det(A_1) &= 0 \cdot (-1)(-1) - 0 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)(-1) + (-1)(-1)2 - (-1)(-1)1 \\ &= 0 - 0 + 0 - 1 + 2 - 1 = 0 \\ \det(A_2) &= 2 \cdot (-1)(-1) - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot 3(-1) + (-1) \cdot 3 \cdot 1 - (-1)(-1)1 \\ &= 2 - 0 + 0 - 0 - 3 - 1 = -2 \\ \det(A_3) &= 2(-1)1 - 2(-1)2 + 1(-1)1 - 1 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) \cdot 1 \\ &= -2 + 4 - 1 - 3 + 0 - 0 = -2. \end{aligned}$$

Cramers regel ger då en unik lösning;

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 0, \\ x_2 &= \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = 1, \\ x_3 &= \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1. \end{aligned}$$

8. (3+3+4p) Ange om följande påståenden är sanna eller falska i allmänhet för tredimensionella vektorer u, v, w. Om påståendet är sant behöver du ge en kort motivation (algebraisk eller geometrisk), och om det är falskt behöver du ge ett motexempel. På varje del ger rätt svar (Sant/Falskt) ett poäng, och övriga poäng ges för motexempel eller motivering.

(a) Vektorerna $u + v, u + 2v$ och $2u + v$ är linjärt beroende.

(b) Vektorn $u - (u \cdot v)v$ är ortogonal mot v.

(c) Om determinanten

$$\begin{vmatrix} | & | & | \\ u & v & w \\ | & | & | \end{vmatrix}$$

är lika med noll, så är w en linjärkombination av u och v.

Lösning.

(a) **Sant.** Alla ligger i planet som spänns upp av u och v. Vi kan skriva

$$u + v = \frac{1}{3}(u + 2v) + \frac{1}{3}(2u + v).$$

(b) **Falskt.** Skalärprodukten ger

$$v \cdot (u - (u \cdot v)v) = v \cdot u - (u \cdot v)\|v\|^2 = (1 - \|v\|^2)(u \cdot v).$$

Det är alltså bara sant om u och v är ortogonala, eller v har längd 1. Ta till exempel $v = (2, 0, 0)$ och $u = (1, 0, 0)$.

(c) **Falskt.** Ta till exempel $u = v = (0, 0, 0)$ och $w = (1, 0, 0)$, eller vilket annat exempel som helst där u och v är parallella där $w = \lambda u$ saknar lösning $\lambda \in \mathbb{R}$.