

Sfäriska koordinater

De sfäriska koordinaterna r , θ och ϕ är relaterade till de cartesiska koordinaterna x , y och z enligt

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta.\end{aligned}\tag{21}$$

Vi inför motsvarande ortonormerade basvektorer $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_\phi$ så att till exempel $\mathbf{e}_r$ pekar i riktning av ökande r vid konstanta värden på θ och ϕ (och alltså är ortogonal mot ytan där r är konstant medan θ och ϕ varierar). Det gäller att

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_x \sin \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \sin \theta \sin \phi + \mathbf{e}_z \cos \theta \\ \mathbf{e}_\theta &= \mathbf{e}_x \cos \theta \cos \phi + \mathbf{e}_y \cos \theta \sin \phi - \mathbf{e}_z \sin \theta \\ \mathbf{e}_\phi &= -\mathbf{e}_x \sin \phi + \mathbf{e}_y \cos \phi.\end{aligned}\tag{22}$$

Övning: Uttryck de sfäriska koordinaterna r , θ och ϕ i de cartesiska koordinaterna x , y och z . Uttryck de cartesiska basvektorerna $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ som linjärkombinationer av de sfäriska basvektorerna $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_\phi$.

Övning: Uttryck Ortsvektorn $\mathbf{r}$ för en punkt P som en linjärkombination av de sfäriska basvektorerna $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_\phi$ med koefficienter som beror på punktens sfäriska koordinater r , θ och ϕ .

Uppgift: Göteborg och Mekka har sfäriska koordinater $\theta_G \simeq 32,3^\circ$, $\phi_G \simeq 12,0^\circ$ respektive $\theta_M \simeq 68,6^\circ$, $\phi_M \simeq 39,8^\circ$. I vilken bäring (vinkel i horisontalplanet relativt nordriktningen) ligger Mekka sett från Göteborg?

Ledning: Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i horisontalplanet genom Göteborg så att $\mathbf{u}$ även ligger i planet genom jordens centrum, Göteborg och nordpolen och $\mathbf{v}$ ligger i planet genom jordens centrum, Göteborg och Mekka. Den sökta bäringen α är vinkeln mellan $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

Fält

En funktion av läget i rummet (ofta representerat genom motsvarande Ortsvektor $\mathbf{r}$ med avseende på origo O) kallas i det här sammanhanget ofta för ett fält. Om funktionsvärdena är skalärer eller vektorer har vi ett skalärfält respektive ett vektorfält. Ett skalärfält kan visualiseras genom sina olika nivåtor där fältet antar ett konstant värde. Ett vektorfält kan visualiseras genom sina fältlinjer, som är kurvor som överallt är parallella med fältet.

Exempel: Väderleksrapporten ger välkända exempel på fält: Vid en viss tidpunkt utgör temperaturen och vindstyrkan som funktion av läget ett skalärfält respektive ett vektorfält. Temperaturens nivåkurvor kallas för isotermer och fältlinjerna åskådliggör de kurvor som till exempel en ballong som driver i vinden skulle följa.

Exempel: En elektrisk punktladdning q i origo alstrar en elektriskt potential som ges av skalärfältet

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|}, \quad (23)$$

där den så kallade elektriska konstanten $\epsilon_0 \simeq 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Övning: Uttryck $\Phi(\mathbf{r})$ i

- a) de cartesiska koordinaterna x , y och z .
 - b) de cylindriska koordinaterna ρ , ϕ och z .
 - c) de sfäriska koordinaterna r , θ och ϕ .
 - d) Skissera nivåytorna.
-

Exempel: Punktladdningen i exemplet ovan kan också beskrivas genom en elektrisk fältstyrka som ges av vektorfältet

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (24)$$

Övning: Uttryck $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ som en linjärkombination av

- a) de cartesiska basvektorerna $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ med koefficienter som beror av x , y och z .
b) de cylindriska basvektorerna $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ och $\mathbf{e}_z$ med koefficienter som beror av ρ , ϕ och z .
c) de sfäriska basvektorerna $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_\phi$ med koefficienter som beror av r , θ och ϕ .
d) Skissera fältlinjerna.

Exempel: En elektrisk dipol i origo med dipolmoment $\mathbf{p}$ kan konstrueras genom att placera punktladdningar $+q$ och $-q$ i punkter med Ortsvektorerna $\frac{1}{2q}\mathbf{p}$ och $-\frac{1}{2q}\mathbf{p}$ och sedan ta gränsen $q \rightarrow \infty$. Den elektriska potentialen i punkten med Ortsvektorn $\mathbf{r}$ ges då av

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2q}\mathbf{p}|} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2q}\mathbf{p}|}, \quad (25)$$

där bidragen från de två punktladdningarna har erhållits genom att förskjuta motsvarande uttryck för en punktladdning i origo med vektorerna $\frac{1}{2q}\mathbf{p}$ respektive $-\frac{1}{2q}\mathbf{p}$. För att kunna ta gränsen $q \rightarrow \infty$, det vill säga $\frac{1}{q} \rightarrow 0$, gör vi en potensserieutveckling i $\frac{1}{q}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r} - \frac{1}{2q}\mathbf{p}|} &= \left((\mathbf{r} - \frac{1}{2q}\mathbf{p}) \cdot (\mathbf{r} - \frac{1}{2q}\mathbf{p}) \right)^{-1/2} \\ &= \left(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{q}\mathbf{r} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right)^{-1/2} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{-1/2} \left(1 - \frac{1}{q} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 + \frac{1}{2q} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right). \end{aligned} \quad (26)$$

På samma sätt får vi att

$$\frac{1}{|\mathbf{r} + \frac{1}{2q}\mathbf{p}|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 - \frac{1}{2q} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right), \quad (27)$$

och slutligen att

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 + \frac{1}{2q} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right) - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left(1 - \frac{1}{2q} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q^2}\right) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{q}\right) \\
&\rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}
\end{aligned} \tag{28}$$

då $q \rightarrow \infty$. Potentialen för en elektrisk dipol $\mathbf{p}$ i origo är alltså

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r}|^3}. \tag{29}$$

Övning: Uttryck den elektriska potentialen för en elektrisk dipol i origo med dipolmoment $\mathbf{p}$ riktad längs med z -axeln (alltså med $\mathbf{p} = p\mathbf{e}_z$)

- a) i cartesiska koordinater
 - b) i cylindriska koordinater
 - c) i sfäriska koordinater.
 - d) Skissera nivåytorna.
-

Övning: Bestäm den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ för en elektrisk dipol i origo med dipolmoment $\mathbf{p}$ genom att placera punktladdningar $+q$ och $-q$ i punkter med Ortsvektorer $\frac{1}{2q}\mathbf{p}$ och $-\frac{1}{2q}\mathbf{p}$ och sedan ta gränsen $q \rightarrow \infty$.

Övning: En elektrisk ström I flyter genom en oändligt lång rak ledare genom origo i riktningen som ges av enhetsvektorn $\mathbf{n}$. Den magnetiska fältstyrkan $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ ges då av

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2}, \tag{30}$$

där $\mu_0 \simeq 1.26 \times 10^{-6}$ H/m är permeabiliteten för vacuum.

- a) Uttryck $\mathbf{B}$ i ett lämpligt koordinatsystem.
 - b) Skissera fältlinjerna.
-