5 Integralsatser

Analysens huvudsats kan skrivas på formen

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{76}$$

Vänsterledet är alltså en integral, vars integrand $F'(x)$ ges av derivatan av en funktion $F(x)$ och där integrationsområdet är det en-dimensionella intervallet $I = [a, b]$. Man kan även betrakta högerledet som en sorts 'integral', även om det i det här fallet reduceras till en diskret summa: Integranden är här funktionen $F(x)$ och integrationsområdet är noll-dimensionellt och består av randen $\partial I = \{a, b\}$ till intervallet I. Att de två randpunkterna i ∂I bidrar med olika tecken i summan beror på att de ligger på olika sidor av intervallet I.

Vi skall nu diskutera några analoga situationer där man kan relatera en integral av en derivata av ett fält över något område till en integral av fältet självt över randen till detta område.

Exakta kurvintegraler

Vi kan använda analysens huvudsats för att beräkna integralen av ett exakt vektorfält $\nabla\Phi$ längs en kurva γ parametriserad av s, $a \leq s \leq b$:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \nabla\Phi \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \nabla\Phi(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds \\ &= \int_a^b \frac{d}{ds}\Phi(\mathbf{r}(s))\,ds \\ &= \Phi(\mathbf{r}(b)) - \Phi(\mathbf{r}(a)).\end{aligned} \tag{77}$$

Integralen beror här alltså bara på ändpunkterna för kurvan γ. Om kurvan är sluten så att dessa sammanfaller blir alltså integralen noll.

En välkänd tillämpning från mekaniken är att beräkna arbetet som utförs av ett konservativt kraftfält $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$ vid förflyttning längs en kurva γ. Som bekant ges detta av skillnaden i potentiell energi Φ mellan start- och slutpunkterna $\mathbf{r}_a$ och $\mathbf{r}_b$ oberoende av längs vilken väg förflyttningen sker:

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \Phi(\mathbf{r}_a) - \Phi(\mathbf{r}_b). \tag{78}$$

Stokes sats

Stokes sats relaterar ytintegralen av en rotation $\nabla \times \mathbf{A}$ över en yta D till kurvintegralen av $\mathbf{A}$ längs den slutna kurva som ges av randen ∂D till ytan D:

$$\int_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}. \tag{79}$$

Konventionen vad det gäller tecknet för normalriktningen för ytan D är att den ges av högerhandsregeln i förhållande till omloppsriktningen för kurvan ∂D.

Exempel: Vi kontrollerar Stokes sats för ytan D given av halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$, $z > 0$ och vektorfältet $\mathbf{A} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v}$, där $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ är konstanta vektorer.

Vi börjar med ytintegralen:

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{A} &= \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v}) \\
&= \nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \times \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\nabla \times \mathbf{v} \\
&= ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{r} + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \times \mathbf{v} \\
&\quad +(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})\nabla \times \mathbf{v} \\
&= \mathbf{u} \times \mathbf{v}
\end{aligned} \tag{80}$$

och

$$\begin{aligned}
d\mathbf{S} &= \mathbf{e}_r \, dS \\
&= (\mathbf{e}_x \sin\theta \cos\phi + \mathbf{e}_y \sin\theta \sin\phi + \mathbf{e}_z \cos\theta) r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi.
\end{aligned} \tag{81}$$

Av symmetriskäl försvinner bidragen från $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_x$ och $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_y$ vid integrering över ϕ så att

$$\begin{aligned}
\int_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z \cos\theta r_0^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \\
&= \pi r_0^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z.
\end{aligned} \tag{82}$$

Vi fortsätter med kurvintegralen:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{\partial D} (u_x x + u_y y + u_z z) \\
&\qquad (v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) \cdot (\mathbf{e}_x \, dx + \mathbf{e}_y \, dy + \mathbf{e}_z \, dz) \\
&= \int_0^{2\pi} r_0 (u_x \cos\phi + u_y \sin\phi)(-v_x \sin\phi + v_y \cos\phi) r_0 d\phi
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= r_0^2 \int_0^{2\pi} (u_x v_y \cos^2\phi - u_y v_x \sin^2\phi) d\phi \\
&= \pi r_0^2 (u_x v_y - u_y v_x) \\
&= \pi r_0^2 (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z
\end{aligned} \tag{83}
$$

En konsekvens av Stokes sats är att kurvintegralen för ett *rotationsfritt* vektorfält $\mathbf{A}$ bara beror på kurvans ändpunkter. Två olika kurvor γ_1 och γ_2 med samma ändpunkter kan nämligen sättas samman med motsatta orienteringar till en sluten kurva γ, som kan ses som randen ∂D till någon yta D. Vi har nu att

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_D (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{\partial D} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_{\gamma_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\gamma_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}.
\end{aligned} \tag{84}
$$

Detta resultat är relaterat till det faktum att ett sådant vektorfält $\mathbf{A}$ alltid kan skrivas på formen $\mathbf{A} = \nabla\Phi$ för något skalärfält Φ. Kurvintegralen är alltså exakt och beror bara på kurvans ändpunkter.

Gauss sats

Gauss sats relaterar integralen av en divergens $\nabla \cdot \mathbf{E}$ över en volym Ω till ytintegralen av $\mathbf{E}$ över den yta som ges av randen $\partial\Omega$ till Ω:

$$
\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, dS. \tag{85}
$$

Teckenkonventionen är här att $\mathbf{n}$ är den utåtriktade enhetsnormalen till $\partial\Omega$.

Exempel: Vi kontrollerar Gauss sats för vektorfältet

$$
\mathbf{E} = x\mathbf{e}_x - y^2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \tag{86}
$$

där Ω är cylindern $x^2 + y^2 \leq a^2$, $-b \leq z \leq b$ för konstanta a och b.

Vi börjar med volymintegralen. Vi har

$$
\nabla \cdot \mathbf{E} = 1 - 2y. \tag{87}
$$

Integralen av den konstanta termen 1 ger volymen av Ω. Den andra termen $-2y$ är udda i y och dess integral försvinner därför eftersom Ω är invariant under symmetrin $y \to -y$. Resultatet är alltså att

$$\int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = 2\pi a^2 b. \tag{88}$$

Ytintegralen får delas upp i tre termer svarande mot de båda cirkelskivorna $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = -b$ och $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = b$ samt mantelytan $x^2 + y^2 = a^2$, $-b \leq z \leq b$. På cirkelskivorna har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= (x\mathbf{e}_x - y^2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \cdot (-\mathbf{e}_z) \\ &= -1 \end{aligned} \tag{89}$$

respektive

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= (x\mathbf{e}_x - y^2\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z \\ &= 1. \end{aligned} \tag{90}$$

Motsvarande integraler ges av $-\pi a^2$ respektive πa^2 och tar alltså ut varandra. På mantelytan har vi i cylindriska koordinater

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= (a\cos\phi(\cos\phi\mathbf{e}_\rho - \sin\phi\mathbf{e}_\phi) - a^2\sin^2\phi(\sin\phi\mathbf{e}_\rho + \cos\phi\mathbf{e}_\phi) + \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_\rho \\ &= a\cos^2\phi - a^2\sin^3\phi \end{aligned} \tag{91}$$

och

$$dS = a\, d\phi\, dz. \tag{92}$$

Ytintegralen ges alltså av

$$\int_0^{2\pi} a d\phi \int_{-b}^{b} dz(a\cos^2\phi - a^2\sin^3\phi) = 2\pi a^2 b. \tag{93}$$

En konsekvens av Gauss sats är att ytintegralen av ett *divergensfritt* vektorfält $\mathbf{B}$ över en yta bara beror på ytans randkurva. Två ytor D_1 och D_2 med samma randkurvor nämligen sättas samman med motsatta orienteringar till en sluten yta D, som utgör randen $\partial\Omega$ till ett område Ω. Vi har nu att

$$0 = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{B} dV$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \\
&= \int_{D_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_{D_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \qquad (94)
\end{aligned}
$$

Exempel: För att beräkna integralen av vektorfältet $\mathbf{A} = A\mathbf{e}_z$ med konstant A över halvsfären $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z > 0$ noterar vi först att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Vi kan då ersätta halvsfären med cirkelskivan $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$, som ju har samma rand, nämligen cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$. Cirkelskivan har enhetsnormalen $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ så att integranden ges av konstanten $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = A$. Multiplikation med cirkelskivans area πa^2 ger att integralen är $A\pi a^2$.

Övning: Vektorfältet $\mathbf{A}$ ges av $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{C}$, där $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är konstanta vektorer. Ytan D ges av halvellipsoiden $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$, $z > 0$ där de så kallade halvaxlarna a, b och c är konstanter. Använd Gauss sats för att beräkna $\int_D \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$.

Övning: Visa att volymen V av ett område Ω som begränsas av randen $\partial\Omega$ ges av

$$
V = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS. \qquad (95)
$$

Kontrollera detta explicit för en sfär med radie a.

En annan viktig tillämpning av Gauss sats handlar om en substans som varken kan nyskapas eller förintas utan bara förflytta sig i rummet. Om skalärfältet ρ beskriver motsvarande densitet så ges den totala mängden substans i en volym Ω av $\int_\Omega \rho \, dV$. Om vektorfältet $\mathbf{j}$ beskriver motsvarande flödestäthet så ges det totala flödet av substansen ut ur Ω av $\int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS$. Det måste nu gälla att

$$
\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho \, dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS. \qquad (96)
$$

Vi tillämpar Gauss lag på högerledet och får då att

$$
\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho \, dV = - \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{j} \, dV. \qquad (97)
$$

Men för att detta skall gälla för alla volymer Ω måste den så kallade kontinuitetsekvationen vara uppfylld:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j}. \tag{98}$$

Singulära fält

Vi tillämpar Stokes sats på vektorfältet $\mathbf{B}$ som beskriver det magnetiska fältet som orsakas av en elektrisk ström I längs med z-axeln (se ekvation 30) :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{-y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y}{x^2 + y^2}. \tag{99}$$

Det är lätt att visa att $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ för $(x, y) \neq (0, 0)$. Detta kan dock inte gälla då $(x, y) = (0, 0)$. Om D är cirkelskivan i xy-planet med radie a och centrum i origo har vi nämligen att

$$\int_{\partial D} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 I. \tag{100}$$

För att Stokes lag skall vara uppfylld måste därför $\nabla \times \mathbf{B}$ vara singulär i origo. I själva verket har vi

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 I \delta(x)\delta(y)\mathbf{e}_z. \tag{101}$$

Uppgift: Låt $\mathbf{B}$ vara givet av det magnetiska fältet orsakat av en elektrisk ström I längs z-axeln enligt ovan.
a) Gör en *direkt* beräkning av $\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r}$ där C är en cirkel i xy-planet med radie a och centrum i punkten med cartesiska koordinater $(x_0, y_0, 0)$. Var noga med att särskilja olika fall beroende på värdena av konstanterna a, x_0 och y_0.
b) Gör om beräkningarna genom att använda Stokes sats.
Ledning: Använd polära koordinater med centrum i origo för beräkningarna i a).

Ett analogt fenomen inträffar när vi tillämpar Gauss lag på vektorfältet $\mathbf{E}$ som beskriver det elektriska fältet som orsakas av en punktladdning q i origo:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \tag{102}$$

Vi har redan visat att $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ för $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Men om Ω är ett klot med radie a och centrum i origo så är det enkelt att beräkna (till exempel i sfäriska koordinater) att

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}. \tag{103}$$

För att Gauss sats skall vara uppfylld måste därför gälla att

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q}{\epsilon_0} \delta(x)\delta(y)\delta(z) \\ &= \frac{q}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{104}$$

där vi har infört den tredimensionella delta-funktionen[4] $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$.

Övning: Med $\mathbf{E}$ givet av det elektriska fältet orsakat av en punktladdning q i origo enligt ovan, beräkna $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$, där S är en sfär med radie a och centrum i punkten med cartesiska koordinater (x_0, y_0, z_0).

---

[4]Det är olämpligt att försöka uttrycka $\delta^{(3)}(\mathbf{r})$ i cylindriska eller sfäriska koordinater, eftersom dessa koordinatsystem är singulära just i origo.