

Vektoranalys för Kf och TM

Måns Henningson

Göteborg 2021

Innehåll

1	Skalärer och vektorer	2
2	Koordinater och fält	9
3	Derivator och potentialteori	15
4	Integraler	27
5	Integralsatser	32
6	Tillämpning på elektromagnetism	39

1 Skalärer och vektorer

Skalärer

En skalär beskrivs av ett enda positivt eller negativt tal.

Vi betecknar skalärer med små eller stora grekiska eller latinska bokstäver: $\phi, \Omega, a, L, \dots$. En skalär kan vara dimensionlös, som till exempel förhållandet mellan en cirkels omkrets och diameter $\pi = 3.1415\dots$ eller sannolikheten $0 \leq p \leq 1$ för att en stokastisk process skall få ett visst utfall. Den kan också ha en enhet, som till exempel ett systems energi E eller temperaturen T vid någon viss tid och punkt i rummet (med enheterna Joule J respektive Kelvin K).

Vektorer

En vektor beskrivs av sin storlek, som i sig är en positiv skalär, och av sin riktning i rummet.

Det är viktigt att man alltid har klart för sig om en viss storhet är en skalär eller en vektor, och därför är det lämpligt att använda en notation där detta framgår. I det här materialet kommer vektorer att betecknas med fetstilta bokstäver: $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{L}, \dots$. När man skriver för hand kan man istället dubbelteckna någon del av bokstaven. En annan vanlig beteckning för vektorer är att istället använda ett streck över bokstaven: $\bar{\phi}, \bar{\Omega}, \bar{a}, \bar{L}, \dots$.

Storleken av en vektor är, som sagt, en (positiv) skalär, och betecknas allmänt genom att vi omger vektorsymbolen med tecknen $|\dots|$. Ofta vill vi förstås införa en bokstavssymbol för denna skalär, och då är det praktiskt att använda den icke fetstilta versionen av vektorns symbol. Vi skriver alltså $\phi = |\boldsymbol{\phi}|, \Omega = |\boldsymbol{\Omega}|, a = |\boldsymbol{a}|, L = |\boldsymbol{L}|, \dots$.

Det grundläggande exemplet på en vektor får vi genom att betrakta den riktade sträckan från en punkt A till en annan punkt B i rummet. Detta definierar en vektor, som vi kan beteckna $\overline{AB}$. Observera att om C och D är två andra punkter i rummet så är naturligtvis den riktade sträckan från A till B inte det samma som den riktade sträckan från C till D , men det kan ändå vara så att motsvarande vektorer överensstämmer: $\overline{AB} = \overline{CD}$. En vektor har alltså i sig varken någon start- eller slutpunkt i rummet. Man brukar säga att en vektor är en ekvivalensklass av riktade sträckor i rummet, där två sträckor är ekvivalenta om de är parallella och har samma storlek (längd).

Ett viktigt specialfall är Ortsvektorn $\overline{OA}$ för en punkt A i rummet med avseende på en referenspunkt O (origo). Ofta betecknar vi en sådan Ortsvektor som $\mathbf{r}$ (eller kanske $\mathbf{x}$), kanske med ett tillagt index $\mathbf{r}_A$ för att markera vilken punkt den avser.

I allmänhet har dock en vektor ingenting att göra med förflyttningar mellan några punkter i rummet. Ett exempel är hastighetsvektorn $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ för en punkt P med den tidsberoende Ortsvektorn $\mathbf{r}$ (med avseende på en fix referenspunkt O). Att vi sedan ändå i figurer ofta representerar en sådan vektor (som har enheten meter per sekund m/s) med en pil (vars storlek har enheten meter m) är en annan sak...

Ytterligare exempel på vektorvärda storheter i mekaniken är acceleration $\mathbf{a}$, rörelsemängd $\mathbf{p}$ och rörelsemängdsmoment $\mathbf{L}$ (med enheterna m/s², kgm/s respektive kgm²/s). I ellära har vi bland annat elektrisk och magnetisk fältstyrka $\mathbf{E}$ och $\mathbf{B}$ (med enheterna Volt per meter V/m respektive Tesla T).

Vektoralgebra

Givet en vektor $\mathbf{u}$ och en skalär α så kan vi bilda en ny vektor $\alpha\mathbf{u}$. Om $\alpha > 0$ så är $\alpha\mathbf{u}$ parallell med $\mathbf{u}$ och har storleken $|\alpha\mathbf{u}| = \alpha|\mathbf{u}|$. Om $\alpha < 0$ så är $\alpha\mathbf{u}$ istället antiparallell med $\mathbf{u}$ och har storleken $|\alpha\mathbf{u}| = -\alpha|\mathbf{u}|$.

Exempel: Vektorn $\hat{\mathbf{a}} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}$ är enhetsvektorn (det vill säga den har storleken $|\hat{\mathbf{a}}| = 1$) som är parallell med $\mathbf{a}$. (Ofta använder vi symboler med en cirkumflex ^ för att markera enhetsvektorer.)

Givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ så kan vi bilda en ny vektor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$. Denna operation kan visualiseras genom parallelogramregeln: Om $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ har dimensionen längd, och alltså kan representeras genom pilar mellan punkter i rummet, så låter vi pilen för $\mathbf{v}$ börja där pilen för $\mathbf{u}$ slutar. Pilen för $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ börjar då i samma punkt som pilen för $\mathbf{u}$ och slutar i samma punkt som pilen för $\mathbf{v}$. Storleken $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$ av $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ begränsas av triangelolikheten:

$$\left| |\mathbf{u}| - |\mathbf{v}| \right| \leq |\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|. \quad (1)$$

(Här betecknar de yttre $|\dots|$ -tecknen i vänsterledet absolutbeloppet av den skalära storheten innanför.)

Övning: Vad är villkoren på $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ för att den vänstra respektive högra

olikheten i triangelolikheten skall vara en likhet?

Mer allmänt så kan vi givet två vektorer $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ och två skalära koefficienter α och β bilda en ny vektor $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}$ genom linjärkombination. Denna operation uppfyller de räkneregler som man kan förvänta sig utifrån den suggestiva notationen (multiplikation av en skalär med en vektor och addition av två vektorer), och vi avstår från att diskutera detta i detalj.

Skalärprodukten

Det finns två olika sätt att multiplicera vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ med varandra. Den första sättet kallas för skalärprodukt eftersom resultatet är en skalär, och betecknas $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. (Ett alternativt namn är dot-produkt.) Det gäller att

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \phi, \quad (2)$$

där ϕ är vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, och operationerna i högerledet är vanlig multiplikation mellan de tre skalärerna $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ och $\cos \phi$. Skalärprodukten uppfyller vad man förväntar sig av en multiplikation, och vi noterar bara särskilt att ordningen mellan faktorerna inte spelar någon roll:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (3)$$

Exempel: Givet en vektor $\mathbf{b} \neq 0$ så kan en godtycklig vektor $\mathbf{a}$ entydigt delas upp enligt $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{\parallel} + \mathbf{a}_{\perp}$, där komponenterna $\mathbf{a}_{\parallel}$ och $\mathbf{a}_{\perp}$ är parallell respektive ortogonal mot $\mathbf{b}$. Komponenterna ges av

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\parallel} &= \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b} \\ \mathbf{a}_{\perp} &= \mathbf{a} - \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}} \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (4)$$

För att kontrollera detta resultat noterar vi att komponenternas summa är lika med $\mathbf{a}$, att $\mathbf{a}_{\parallel}$ är parallell med $\mathbf{b}$ och att $\mathbf{a}_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0$, vilket betyder att $\mathbf{a}_{\perp}$ är ortogonal mot $\mathbf{b}$. Notera även att $\mathbf{a}_{\parallel} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, vilket betyder att $\mathbf{a}_{\parallel}$ och $\mathbf{a}$ har samma projektion i riktningen som ges av $\mathbf{b}$.

Övning: Visa cosinusteoremet

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \phi, \quad (5)$$

där a , b och c är sidlängder i en godtycklig triangel och ϕ är vinkeln mellan de två första sidorna.

Övning: Givet två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ som inte är parallella eller anti-parallella och en godtycklig vektor $\mathbf{c}$, bestäm projektionen $\mathbf{c}'$ av $\mathbf{c}$ på det plan som spänns upp av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.

(*Ledning:* Vektorn $\mathbf{c}'$ kan skrivas som en linjärkombination av $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ med skalära koefficienter x och y . Dessa koefficienter är entydigt bestämda av de två villkoren att $\mathbf{c}'$ och $\mathbf{c}$ skall ha samma skalärprodukter med $\mathbf{a}$ och att $\mathbf{c}'$ och $\mathbf{c}$ skall ha samma skalärprodukter med $\mathbf{b}$. Skillnaden mellan $\mathbf{c}$ och $\mathbf{c}'$ är ju en vektor $\mathbf{c}_\perp$ som är ortogonal mot både $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$.)

Övning: Givet tre linjärt oberoende vektorer $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$, konstruera en vektor $\mathbf{X}$ som bildar samma vinklar med $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$.

(*Ledning:* Vektorn $\mathbf{X}$ är bara bestämd upp till en multipel. Skriv den som en linjärkombination av $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ med okända koefficienter. Förenkla dina slutliga uttryck så att man tydligt ser symmetrin mellan $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$.)

Vektorprodukten

Det andra sättet att multiplicera vektorer med varandra kallas för vektorprodukt, eftersom resultatet är en vektor, och betecknas $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. (Ett alternativt namn är kryss-produkt.) Vi beskriver denna vektor genom att ange dess storlek och dess riktning i rummet. Storleken ges av

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \phi, \quad (6)$$

där ϕ fortfarande är vinkeln mellan vektorerna $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, och operationerna i högerledet är vanlig multiplikation mellan de tre skalärerna $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$ och $\sin \phi$. Riktningen i rummet för $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ är sådan att den är vinkelrät mot både $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, och att de tre vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (i den ordningen!) bildar ett högersystem. (Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ är parallella eller anti-parallella fungerar inte denna definition av riktningen, men då är $\phi = 0$ respektive $\phi = \pi$ så att $\sin \phi = 0$ och således $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$.) Även vektorprodukten uppfyller vad

man förväntar sig av en multiplikation, men notera att ordningen mellan faktorerna här spelar en roll:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}. \quad (7)$$

Exempel: Låt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ vara vektorer längs med sidorna i en parallelepiped. Vektorn $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ är vinkelrät mot planet som spänns upp av $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$, och dess storlek ges av arean av parallelogrammet med sidorna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. Den så kallade skalära trippelprodukten $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ges då av (plus eller minus) parallelepipedens volym. Denna volym är naturligtvis oberoende av sidornas ordning, vilket ger likheterna

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (8)$$

Exempel: Låt $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ vara tre godtyckliga vektorer. Vektorn $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ är parallell med normalen till det plan som spänns upp av $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. Den vektoriella trippelprodukten $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ är vinkelrät mot denna normal och därför en linjärkombination av vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. För att bestämma koefficienterna i denna linjärkombination noterar vi att trippelprodukten är trilinear i $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ samt att den byter tecken under utbyte av $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$. Vi avvaktar lite med det fullständiga beviset, men resultatet är att

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}. \quad (9)$$

Övning: Visa att

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}). \quad (10)$$

Ortonormerade baser

En ortonormerad bas består av tre inbördes ortonala enhetsvektorer $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$. Skalarprodukterna mellan dem ges alltså av multiplikationstabellen

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 & 1 & 0 & 0 & \\ \mathbf{e}_2 & 0 & 1 & 0 & \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 1 & \end{array} \quad (11)$$

Ofta pålägger vi även villkoret att $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ (i den ordningen) skall utgöra ett högersystem (en högerortonormerad bas eller HON-bas), och då ges vektorprodukten mellan dem av multiplikationstabellen

$$\begin{array}{ccccc} \times & & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 & 0 & \mathbf{e}_3 & -\mathbf{e}_2 & \\ \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 & 0 & \mathbf{e}_1 & \\ \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_1 & 0 & \end{array} \quad (12)$$

där den första kolumnen betecknar den vänstra faktorn och den första raden betecknar den högra faktorn.

En godtycklig vektor $\mathbf{v}$ kan nu entydigt utvecklas som en linjärkombination av dessa med koefficienter v_1 , v_2 och v_3 :

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + v_3\mathbf{e}_3. \quad (13)$$

(Vi kan även skriva detta som $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ där vektorerna $\mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{v}_3 = v_3\mathbf{e}_3$ kallas för komponenter av vektorn $\mathbf{v}$ i riktningarna $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$.)

Övning: Bevisa formeln ovan för den vektoriella trippelprodukten genom att utveckla vektorerna $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ i en högerortonormerad bas $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$.

Det finns oändligt många val av högerortonormerade baser. En välkänd algoritm för att konstruera en sådan bas utgående från tre godtyckliga linjärt oberoende vektorer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ kallas för Gram-Schmidt processen: Vi väljer basvektorn $\mathbf{e}_1$ som enhetsvektorn parallell med $\mathbf{u}_1$. Sedan väljer vi basvektorn $\mathbf{e}_2$ som enhetsvektorn parallell med den komponent av $\mathbf{u}_2$ som är

ortogonal mot $\mathbf{u}_1$. Slutligen väljer vi basvektorn $\mathbf{e}_3$ som enhetsvektorn som är ortogonal mot planet som spänns av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$.

Övning: Fundera på vad som händer om man försöker genomföra Gram-Schmidt processen utgående från tre vektorer $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{u}_3$ som är linjärt beroende.

Övning: Om $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$ är en högerortonormerad bas så kan tre godtyckliga vektorer $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ och $\mathbf{e}'_3$ utvecklas i denna enligt ovan:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= m_{11}\mathbf{e}_1 + m_{12}\mathbf{e}_2 + m_{13}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 &= m_{21}\mathbf{e}_1 + m_{22}\mathbf{e}_2 + m_{23}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 &= m_{31}\mathbf{e}_1 + m_{32}\mathbf{e}_2 + m_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{14}$$

Vad är villkoret på koefficientmatrisen

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}\tag{15}$$

för att även $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ och $\mathbf{e}'_3$ skall utgöra en högerortonormerad bas?
