3 Derivator och potentialteori

Partiella derivator

I till exempel cartesiska koordinater x, y och z, inför vi de partiella derivatorna $\frac{\partial}{\partial x} = \partial_x$, $\frac{\partial}{\partial y} = \partial_y$ och $\frac{\partial}{\partial z} = \partial_z$. Exempelvis betyder ∂_x derivering med avseende på koordinaten x medan koordinaterna y och z hålls konstanta. På samma sätt kan vi införa partiella derivator ∂_ρ, ∂_ϕ och ∂_z i cylindriska koordinater och ∂_r, ∂_θ och ∂_ϕ i sfäriska koordinater. Vi kan översätta mellan de olika koordinatsystemen genom att använda kedjeregeln. Till exempel har vi

$$\begin{aligned}
\partial_x &= \frac{\partial\rho}{\partial x}\partial_\rho + \frac{\partial\phi}{\partial x}\partial_\phi + \frac{\partial z}{\partial x}\partial_z \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_\rho - \frac{y}{x^2+y^2}\partial_\phi \\
&= \cos\phi\partial_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho}\partial_\phi \\
\partial_y &= \frac{\partial\rho}{\partial y}\partial_\rho + \frac{\partial\phi}{\partial y}\partial_\phi + \frac{\partial z}{\partial y}\partial_z \\
&= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_\rho + \frac{x}{x^2+y^2}\partial_\phi \\
&= \sin\phi\partial_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho}\partial_\phi \\
\partial_z &= \frac{\partial\rho}{\partial z}\partial_\rho + \frac{\partial\phi}{\partial z}\partial_\phi + \frac{\partial z}{\partial z}\partial_z \\
&= \partial_z. \qquad (31)
\end{aligned}$$

Övning: Använd kedjeregeln för att uttrycka ∂_x, ∂_y och ∂_z i de sfäriska partiella derivatorna ∂_r, ∂_θ och ∂_ϕ.

Gradient

Gradienten av ett skalärfält Φ är ett vektorfält som betecknas $\operatorname{grad}\Phi$ eller $\nabla\Phi$. Symbolen ∇ utläses som 'del' eller 'nabla'[2]. Riktningen av vektorfältet $\nabla\Phi$ är den i vilken skalärfältet Φ ökar snabbast, och är alltså normal till nivåytorna för Φ. Storleken av $\nabla\Phi$ anger hur snabbt Φ ökar i denna riktning.

[2]Från grekiskans $\eta\alpha\beta\lambda\alpha$ som betecknar en sorts fenicisk harpa med triangulär form.

Om $\mathbf{n}$ är en enhetsvektor så kallas skalärprodukten $\mathbf{n} \cdot \nabla\Phi$ för riktningsderivatan av Φ och anger hur snabbt Φ ökar i denna riktning.

Om $\nabla\Phi$ utvecklas i en cartesisk ortonormerad bas $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ så ges koefficienterna av motsvarande partiella derivator ∂_x, ∂_y och ∂_z av Φ:

$$\nabla\Phi = \mathbf{e}_x\partial_x\Phi + \mathbf{e}_y\partial_y\Phi + \mathbf{e}_z\partial_z\Phi. \tag{32}$$

Vi kan naturligtvis även arbeta i till exempel cylindriska koordinater. Genom att invertera relationen mellan de cartesiska och cylindriska basvektorerna i förra avsnittet finner man att

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_\rho \cos\phi - \mathbf{e}_\phi \sin\phi \\ \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_\rho \sin\phi + \mathbf{e}_\phi \cos\phi \\ \mathbf{e}_z &= \mathbf{e}_z. \end{aligned} \tag{33}$$

Insättning i (32) ger nu

$$\nabla\Phi = \left(\mathbf{e}_\rho\partial_\rho + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{\rho}\partial_\phi + \mathbf{e}_z\partial_z\right)\Phi. \tag{34}$$

På samma sätt får vi i sfäriska koordinater att

$$\nabla\Phi = \left(\mathbf{e}_r\partial_r + \mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \mathbf{e}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\right)\Phi. \tag{35}$$

Exempel: Vi beräknar gradienten av det komplexa skalärfältet $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} \nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} &= (\mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y + \mathbf{e}_z\partial_z)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= (\mathbf{e}_x ik_x + \mathbf{e}_y ik_y + \mathbf{e}_z ik_z)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= i\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Exempel: Avståndet $r = |\mathbf{r}|$ till origo är i sig ett viktigt exempel på ett skalärt fält. Det är lätt att beräkna dess gradient genom att använda till exempel cartesiska koordinater:

$$\begin{aligned} \nabla r &= (\mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y + \mathbf{e}_z\partial_z)\,(x^2+y^2+z^2)^{1/2} \\ &= \mathbf{e}_x\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \mathbf{e}_y\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \mathbf{e}_z\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{37}$$

Gradienten ges alltså av den utåtriktade radiella enhetsvektorn.

Övning: Gör om beräkningen av ∇r
a) i cylindriska koordinater.
b) i sfäriska koordinater.

Övning: Betrakta skalärfältet

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0 + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \tag{38}$$

där Φ_0 är en skalär konstant och $\mathbf{a}$ och $\mathbf{r}_0$ är konstanta vektorer.
a) Skissera nivåytorna.
b) Beräkna gradienten $\nabla\Phi$.

Övning:
a) Beräkna gradienten för potentialen (23) från en elektrisk punktladdning genom att använda valfritt koordinatsystem.
b) Uttryck resultatet i termer av ortsvektorn $\mathbf{r}$ utan att använda något specifikt koordinatsystem.

Övning:
a) Beräkna gradienten för potentialen (29) från en elektrisk dipol genom att använda valfritt koordinatsystem.
b) Uttryck resultatet i termer av ortsvektorn $\mathbf{r}$ utan att använda något specifikt koordinatsystem.

Divergens

Divergensen av ett vektorfält $\mathbf{A}$ är ett skalärfält som betecknas $\operatorname{div} A$ eller $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

Om vi tänker på ett vektorfält $\mathbf{v}$ som en flödeshastighet för en fluid (en vätska eller en gas), så anger divergensen $\nabla \cdot \mathbf{v}$ nettoflödet per volymsenhet

ut ur eller in i (beroende på om divergensen är positiv eller negativ) ett litet volymselement. För en inkompressibel fluid (såsom en ideal vätska) måste alltså denna divergens vara noll.

I cartesiska koordinater ges divergensen av vektorfältet $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$ av uttrycket

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z. \tag{39}$$

Sätter vi in (20) och (31) i detta uttryck så finner vi att divergensen i cylindriska koordinater av vektorfältet $\mathbf{A} = \mathbf{e}_\rho A_\rho + \mathbf{e}_\phi A_\phi + \mathbf{e}_z A_z$ ges av

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{A} &= (\cos\phi\partial_\rho - \frac{\sin\phi}{\rho}\partial_\phi)(A_\rho \cos\phi - A_\phi \sin\phi) \\
&\quad +(\sin\phi\partial_\rho + \frac{\cos\phi}{\rho}\partial_\phi)(A_\rho \sin\phi + A_\phi \cos\phi) \\
&\quad +\partial_z A_z \\
&= \partial_\rho A_\rho + \frac{1}{\rho}A_\rho + \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z \\
&= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z.
\end{aligned} \tag{40}$$

På samma sätt finner man i sfäriska koordinater att divergensen för $\mathbf{A} = A_r\mathbf{e}_r + A_\theta\mathbf{e}_\theta + A_\phi\mathbf{e}_\phi$ ges av

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi A_\phi. \tag{41}$$

Exempel: En stel kropp roterar med vinkelhastigheten $\mathbf{w}$ runt punkten med ortsvektor $\mathbf{r}_0$. Hastigheten i punkten med ortsvektor $\mathbf{r}$ är då $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$. Vi kontrollerar att detta hastighetsfält är divergensfritt:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{v} &= \nabla \cdot (w_y(z - r_{0z})\mathbf{e}_x + w_z(x - r_{0x})\mathbf{e}_y + w_x(y - r_{0y})\mathbf{e}_z) \\
&= \partial_x(w_y(z - r_{0z})) + \partial_y(w_z(x - r_{0x})) + \partial_z(w_x(y - r_{0y})) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{42}$$

Exempel: Ortsvektorn $\mathbf{r}$ är i sig ett viktigt exempel på ett vektorfält. Det är lätt att beräkna dess divergens genom att använda till exempel cartesiska koordinater:

$$\nabla \cdot \mathbf{r} = \nabla \cdot (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \partial_x x + \partial_y y + \partial_z z \\
&= 1 + 1 + 1 \\
&= 3. \qquad (43)
\end{aligned}
$$

Övning: Gör om beräkningen av $\nabla \cdot \mathbf{r}$
a) i cylindriska koordinater.
b) i sfäriska koordinater.

Övning: Beräkna divergensen av vektorfältet $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{C}$, där $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är konstanta vektorer.

Exempel: Vi beräknar divergensen av fältstyrkan (24) från en elektrisk punktladdning q i origo. I cartesiska koordinater har vi

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= \nabla \cdot \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\partial_x \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \partial_y \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \partial_z \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} - \frac{3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \right) \\
&= 0 \qquad (44)
\end{aligned}
$$

så länge $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, det vill säga $\mathbf{r} \neq 0$. Vi återkommer i ett senaren avsnitt till vad som händer i origo.

Rotation

Rotationen av ett vektorfält $\mathbf{A}$ är ett vektorfält som betecknas $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ eller $\nabla \times \mathbf{A}$.

Om vektorfältet $\mathbf{v}$ beskriver hastigheten för en fluid så är rotationen $\nabla \times \mathbf{v}$ ett mått på förekomsten av virvlar i flödet. Till exempel kommer en liten boll

nedsänkt i fluiden att rotera med en vinkelhastighet som är proportionell mot $\nabla \times \mathbf{v}$.

I cartesiska koordinater har vi med $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_x + \mathbf{e}_y A_y + \mathbf{e}_z A_z$ att

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y)\mathbf{e}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\mathbf{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\mathbf{e}_z. \quad (45)$$

I cylindriska eller sfäriska koordinater blir detta

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi\right)\mathbf{e}_\rho + (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z)\,\mathbf{e}_\phi + \frac{1}{\rho}\left(\partial_\rho(\rho A_\phi) - \partial_\phi A_\rho\right)\mathbf{e}_z \quad (46)$$

respektive

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\partial_\theta(A_\phi \sin\theta) - \partial_\phi A_\theta\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi A_r - \frac{1}{r}\partial_r(rA_\phi)\right)\mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \frac{1}{r}\left(\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\right)\mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (47)$$

Exempel: Vi beräkna rotationen för vektorfältet $\mathbf{v} = \mathbf{w} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ som beskriver hastigheten för en punkt med ortsvektor $\mathbf{r}$ i en stel kropp som roterar med vinkelhastighet $\mathbf{w}$ kring punkten med ortsvektor $\mathbf{r}_0$. I cartesiska koordinater har vi

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{v} &= \nabla \times (w_y(z - r_{0z})\mathbf{e}_x + w_z(x - r_{0x})\mathbf{e}_y + w_x(y - r_{0y})\mathbf{e}_z) \\ &= (\partial_y(w_x(y - r_{0y})) - \partial_z(w_z(x - r_{0x})))\mathbf{e}_x \\ &\quad + (\partial_z(w_y(z - r_{0z})) - \partial_x(w_x(y - r_{0y})))\mathbf{e}_y \\ &\quad + (\partial_x(w_z(x - r_{0x})) - \partial_y(w_y(z - r_{0z})))\mathbf{e}_z \\ &= w_x\mathbf{e}_x + w_y\mathbf{e}_y + w_z\mathbf{e}_z \\ &= \mathbf{w}. \end{aligned} \quad (48)$$

Övning: Beräkna rotationen av vektorfältet $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{r})\mathbf{C}$, där $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ är konstanta vektorer.

Exempel: Vi beräknar rotationen för ortsvektorn $\mathbf{r}$ genom att använda cartesiska koordinater:

$$\nabla \times \mathbf{r} = \nabla \times (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{e}_x(\partial_y z - \partial_z y) + \mathbf{e}_y(\partial_z x - \partial_x z) + \mathbf{e}_z(\partial_x y - \partial_y x) \\
&= 0. \qquad (49)
\end{aligned}
$$

Övning: Gör om beräkningen av $\nabla \times \mathbf{r}$
a) i cylindriska koordinater.
b) i sfäriska koordinater.

Symbolen ∇

Vi använder alltså samma symbol ∇ för såväl gradient, divergens som rotation, trots att det naturligtvis egentligen är helt olika operationer; de verkar ju på olika slags fält (skalärfält, vektorfält respektive vektorfält) och ger olika slags fält (vektorfält, skalärfält respektive vektorfält) som resultat. Men precis som en vanlig vektor $\mathbf{V}$ kan multipliceras med ett fält på olika sätt ($\mathbf{V}\Phi$, $\mathbf{V} \cdot \mathbf{A}$ eller $\mathbf{V} \times \mathbf{A}$) så är det ändå intuitivt tilltalande att försöka ge symbolen ∇ en självständig innebörd som ett slags vektor vars komponenter inte är tal utan partiella derivator, och som kan verka på sådana fält på olika sätt ($\nabla\Phi$, $\nabla \cdot \mathbf{A}$ eller $\nabla \times \mathbf{A}$). I cartesiska koordinater fungerar detta bra, och vi kan skriva

$$\nabla = \mathbf{e}_x\partial_x + \mathbf{e}_y\partial_y + \mathbf{e}_z\partial_z. \qquad (50)$$

Om vi i detta uttryck utför bytet från de cartesiska basvektorerna $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$ till cylindriska basvektorer $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\phi$ och $\mathbf{e}_z$ eller sfäriska basvektorer $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ och $\mathbf{e}_\phi$ och ersätter de partiella derivatorna ∂_x, ∂_y och ∂_z med ∂_ρ, ∂_ϕ och ∂_z respektive ∂_r, ∂_θ och ∂_ϕ enligt kedjeregeln så får vi uttryck för ∇ som ger de korrekta resultaten (34) och (35) för gradienten i cylindriska respektive sfäriska koordinater. Men som vi har sett ovan så ges divergensen och rotationen i cylindriska och sfäriska koordinater av mer komplicerade uttryck (40)(41)(46)(47). Det är alltså säkrast att inte ge den suggestiva symbolen ∇ en alltför självständig innebörd.

Produktregler

Den vanliga derivatan uppfyller den välkända produktregeln (Leibniz regel): $(fg)' = f'g + fg'$. Gradienten, divergensen och rotationen uppfyller liknande

regler:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) &= (\nabla \Phi) \cdot \mathbf{A} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{A} \\
\nabla \times (\Phi \mathbf{A}) &= (\nabla \Phi) \times \mathbf{A} + \Phi \nabla \times \mathbf{A} \\
\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\
\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\
\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}. \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Exempel: Vi bevisar den första produktregeln genom en explicit beräkning i cartesiska koordinater:

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot (\Phi \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\Phi(A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z)) \\
&= \nabla \cdot (\Phi A_x \mathbf{e}_x + \Phi A_y \mathbf{e}_y + \Phi A_z \mathbf{e}_z) \\
&= \partial_x(\Phi A_x) + \partial_y(\Phi A_y) + \partial_z(\Phi A_z) \\
&= \partial_x \Phi A_x + \Phi \partial_x A_x + \partial_y \Phi A_y + \Phi \partial_y A_y + \partial_z \Phi A_z + \Phi \partial_z A_z \\
&= (\partial_x \Phi \mathbf{e}_x + \partial_y \Phi \mathbf{e}_y + \partial_z \Phi \mathbf{e}_z) \cdot (A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z) \\
&\quad + \Phi(\partial_x A_x + \partial_y A_y + \partial_z A_z) \\
&= \nabla \Phi \cdot \mathbf{A} + \Phi \nabla \cdot \mathbf{A}. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Övning: Bevisa valfritt antal av de övriga produktreglerna

Rotationen av en gradient - skalärpotential

Det vektorfält $\nabla \Phi$ som man får genom att ta gradienten av ett skalärfält Φ är alltid rotationsfritt. Vi kontrollerar detta genom en explicit beräkning i cartesiska koordinater:

$$
\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \Phi) &= \nabla \times (\partial_x \Phi \mathbf{e}_x + \partial_y \Phi \mathbf{e}_y + \partial_z \Phi \mathbf{e}_z) \\
&= (\partial_y \partial_z \Phi - \partial_z \partial_y \Phi)\mathbf{e}_x + (\partial_z \partial_x \Phi - \partial_x \partial_z \Phi)\mathbf{e}_y + (\partial_x \partial_y \Phi - \partial_y \partial_x \Phi)\mathbf{e}_z \\
&= 0. \qquad (53)
\end{aligned}
$$

Det finns en omvändning till detta resultat: Antag att $\mathbf{E}$ är ett rotationsfritt vektorfält så att $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ Det finns då alltid ett skalärfält Φ så att $\mathbf{E} = -\nabla \Phi$. Detta skalärfält Φ är inte riktigt entydigt bestämt av $\mathbf{E}$, för vi kan alltid addera en konstant, vars gradienten naturligtvis är noll, till Φ.

Rotationsfria vektorfält är välkända från mekaniken, där en kraft $\mathbf{F}$ som beskrivs att ett sådant fält sägs vara exakt eller konservativ. Det finns då alltid en potentiell energi Φ så att $\mathbf{F} = -\nabla\Phi$. Friheten att addera en konstant till Φ betyder att vi kan välja referensnivån för den potentiella energin godtyckligt.

I en statisk situation är den elektrisk fältstyrkan $\mathbf{E}$ alltid rotationsfri, och kan alltså beskrivas som den negativa gradienten av ett skalärfält Φ. Fältet Φ kallas för den elektriska potentialen, och är bara bestämt upp till en additiv konstant.

Övning: Visa att den elektriska fältstyrkan (24) för en elektrisk punktladdning är rotationsfri. Härled den sedan från den elektriska potentialen (23).

Övning: Bestäm den elektrisk fältstyrkan för en elektrisk dipol genom att beräkna gradienten för motsvarande elektriska potential (29).

Divergensen av en rotation - vektorpotential

Det vektorfält $\nabla \times \mathbf{A}$ som man får genom att ta rotationen av ett vektorfält $\mathbf{A}$ är alltid divergensfritt. Vi kontrollerar detta genom en explicit beräkning i cartesiska koordinater:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla \cdot (\nabla \times (A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z)) \\
&= \nabla \cdot ((\partial_y A_z - \partial_z A_y)\mathbf{e}_x + (\partial_z A_x - \partial_x A_z)\mathbf{e}_y + (\partial_x A_y - \partial_y A_x)\mathbf{e}_z) \\
&= \partial_x(\partial_y A_z - \partial_z A_y) + \partial_y(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_z(\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\
&= \partial_x\partial_y A_z - \partial_x\partial_z A_y + \partial_y\partial_z A_x - \partial_y\partial_x A_z + \partial_z\partial_x A_y - \partial_z\partial_y A_x \\
&= 0. \qquad (54)
\end{aligned}$$

Det finns en omvändning även till detta resultat: Antag att $\mathbf{B}$ är ett divergensfritt vektorfält så att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Det finns då alltid ett vektorfält $\mathbf{A}$ så att $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Detta vektorfält $\mathbf{A}$ är inte riktigt entydigt bestämt av $\mathbf{B}$; vi kan nämligen alltid addera en godtycklig divergens, vars rotation ju är noll, till $\mathbf{A}$.

En magnetisk fältstyrka $\mathbf{B}$ är alltid divergensfri, och kan alltså beskrivas som rotationen av ett vektorfält $\mathbf{A}$. Fältet $\mathbf{B}$ kallas i det här sammanhanget

för en vektorpotential, och friheten att addera en godtycklig divergens till $\mathbf{A}$ svarar mot vad som kallas för olika val av *gauge*[3].

Övning:
a) Kontrollera att den magnetiska fältstyrkan $\mathbf{B}$ från en oändligt lång rak ledare (30) är divergensfri.
b) Konstruera en vektorpotential $\mathbf{A}$ så att $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.
(*Ledning*: Man kan välja en gauge så att $\mathbf{A}$ är parallell med enhetsvektorn $\mathbf{n}$ överallt.)

Divergensen av en gradient: Laplaceoperatorn

Divergensen av gradienten av ett skalärfält Φ skrivs som $\nabla^2\Phi$ och är också ett skalärfält. Operatorn ∇^2 kallas för Laplaceoperatorn. I cartesiska, cylindriska och sfäriska koordinater har vi

$$\begin{aligned}
\nabla^2\Phi &= \nabla\cdot(\nabla\Phi) \\
&= \partial_x^2\Phi + \partial_y^2\Phi + \partial_z^2\Phi \\
&= \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho\partial_\rho\Phi) + \frac{1}{\rho^2}\partial_\phi^2 + \partial_z^2\Phi \\
&= \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2\partial_r\Phi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\partial_\phi^2\Phi. \qquad (55)
\end{aligned}$$

Vi säger att det skalära fältet Φ är en egenfunktion till Laplaceoperatorn ∇^2 med egenvärde givet av konstanten λ om

$$\nabla^2\Phi = \lambda\Phi. \qquad (56)$$

Övning: Bestäm alla egenvärden λ och egenfunktioner Φ till Laplaceoperatorn ∇^2 i rätblocket $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$ med Dirichlet randvillkor. (Dessa randvillkor betyder att $\Phi = 0$ på rätblockets rand.)

Ett skalärfält Φ som uppfyller Laplaceekvationen

$$\nabla^2\Phi = 0 \qquad (57)$$

[3]Med engelskt (och inte franskt) uttal.

sägs vara harmonisk. Denna ekvation beskriver bland annat den elektriska potentialen Φ i ett område utan elektriska laddningar.

Exempel: Vi bestämmer skalärfältet $\Phi(\mathbf{r})$ så att det antar de konstanta värdena Φ_1 och Φ_2 på de parallella planen där $z = z_1$ respektive $z = z_2$ och är harmoniskt i området där $z_1 < z < z_2$. Eftersom situationen är oberoende av x- och y-koordinaterna ansätter vi en funktion som endast beror på z-koordinaten:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(z). \tag{58}$$

Villkoret att $\Phi(\mathbf{r})$ skall vara harmonisk lyder då

$$\partial_z^2 \Phi(z) = 0 \tag{59}$$

med den allmänna lösningen $\Phi(z) = a + bz$ för godtyckliga konstanter a och b. Randvillkoren ger slutligen att

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_1 \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} + \Phi_2 \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \tag{60}$$

Övning: Bestäm skalärfältet Φ så att det antar de konstanta värdena Φ_1 och Φ_2 på de koncentriska oändliga cylinderytorna där $\rho = \rho_1$ respektive $\rho = \rho_2$ och är harmoniskt i området där $\rho_1 < \rho < \rho_2$.

Uppgift: Bestäm skalärfältet Φ så att det antar de konstanta värdena Φ_1 och Φ_2 på de koncentriska sfäriska ytorna där $r = r_1$ respektive $r = r_2$ och är harmoniskt i området där $r_1 < r < r_2$.

Gradienten av en divergens, rotationen av en rotation, Laplaceoperatorn på ett vektorfält

Det återstår två kombinationer av gradient, divergens och rotation av andra ordningen i derivator: Givet ett vektorfält $\mathbf{A}$ så kan vi bilda gradienten av dess divergens $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})$ samt rotationen av dess rotation $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$. Båda dessa

fält är vektorfält. En viktig kombination av dem kallas för Laplaceoperatorn ∇^2 verkande på vektorfält och definieras som

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}). \tag{61}$$

Vi använder alltså här samma symbol ∇^2 som för den Laplaceoperator som verkar på skalärfält, men det är naturligtvis egentligen en helt annan operator. Anledningen till detta missbruk av notation framgår tydligast i cartesiska koordinater:

Övning: Beräkna explicit $\nabla^2 \mathbf{A}$ för vektorfältet $\mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$.