

4 Integraler

En integral, till exempel det från endimensionell analys välkända uttrycket $\int_a^b f(x) dx$, är specificerad av en integrand $f(x)$, som multipliceras med ett integrationsmått dx och därefter integreras över ett område $a \leq x \leq b$. Integranden, multiplikationen, integrationsmättet och integrationsområdet kan alla generaliseras på olika sätt. Vi nöjer oss med att beskriva de viktigaste fallen.

Kurvintegraler

Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kan skalärmultipliceras med ett linjeelement $d\mathbf{r}$ (tolkat som en infinitesimal förändring av Ortsvektorn $\mathbf{r}$) och integreras längs med en kurva γ i rummet:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (62)$$

I allmänhet beror integralen på den exakta kurvan γ , inte bara på dess ändpunkter. En välkänd tillämpning från mekaniken är arbetet som uträttas vid förflyttning längs en kurva γ i ett kraftfält $\mathbf{F}$.

Vi återför kurvintegralen på en vanlig integral genom att införa en parameter s som varierar i ett intervall $a \leq s \leq b$ när Ortsvektorn $\mathbf{r}(s)$ genomlöper kurvan γ . Vi har då

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} ds. \quad (63)$$

Linjeelementet $d\mathbf{r}$ kan uttryckas i cartesiska, cylindriska eller sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} &= \mathbf{e}_x dx + \mathbf{e}_y dy + \mathbf{e}_z dz \\ &= \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\phi \rho d\phi + \mathbf{e}_z dz \\ &= \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\theta r d\theta + \mathbf{e}_\phi r \sin \theta d\phi. \end{aligned} \quad (64)$$

Exempel: Integralen av kraftfältet $\mathbf{F} = y\mathbf{e}_x$ moturs över halvcirkeln γ som ges av $x^2 + y^2 = \rho_0^2, y > 0, z = 0$ beräknas enkelt genom att använda parametriseringen $x = \rho_0 \cos \phi, y = \rho_0 \sin \phi, 0 \leq \phi \leq \pi$:

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \rho_0 \sin \phi \mathbf{e}_x \cdot (-\mathbf{e}_x \rho_0 \sin \phi d\phi + \mathbf{e}_y \rho_0 \cos \phi d\phi)$$

$$\begin{aligned}
&= -\rho_0^2 \int_0^\pi \sin^2 \phi \, d\phi \\
&= -\frac{\pi \rho_0^2}{2}.
\end{aligned} \tag{65}$$

Om vi istället integrerar längs den rätta linjen från $(x, y, z) = (\rho_0, 0, 0)$ till $(x, y, z) = (-\rho_0, 0, 0)$ där $\mathbf{F} = 0$ så blir naturligtvis integralen noll.

Övning: Visa att arbetet som uträttas av tyngdkraften $\mathbf{F} = G \frac{mM}{r^2} \mathbf{e}_r$ när en kropp med massa m förflyttas från jordytan med radie $r = r_0$ till en punkt på avståndet $r = r_1$ från jordens centrum är oberoende av vilken kurva kroppen följer och beräkna detta arbete. (Här är G gravitationskonstanten och M är jordklotets massa.)

Exempel: Vi beräknar integralen av den magnetiska fältstyrkan (30) längs en cirkel med centrum i origo och radie ρ_0 i ett plan vinkelrät mot enhetsvektorn $\mathbf{n}$. I cylindriska koordinater med $\mathbf{e}_z = \mathbf{n}$ har vi

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\mathbf{e}_\phi}{\rho}. \tag{66}$$

Cirkeln γ kan parametreras med vinkeln ϕ så att $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_\phi \rho_0 \, d\phi$. Vi får då

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi \\
&= \mu_0 I
\end{aligned} \tag{67}$$

oberoende av radien ρ_0 .

Övning: Beräkna integralen av den magnetiska fältstyrkan (30) längs en kvadrat med centrum i origo och sidlängd $2a$ i ett plan vinkelrät mot enhetsvektorn $\mathbf{n}$.

Ytintegraler

Normalkomponenten av ett vektorfält $\mathbf{j}$ kan integreras över en yta D :

$$\int_D \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (68)$$

där dS är ett infinitesimalt ytelement med enhetsnormal $\mathbf{n}$ (som i allmänhet varierar över ytan D). För en sluten yta är konventionen att välja den utåtriktade enhetsnormalen. Ibland inför vi beteckningen $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ för det vektoriella ytelementet så att integralen kan skrivas $\int_D \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$.

Om $\mathbf{j}$ till exempel är en elektrisk strömtäthet (enhet A/m²) så är $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n}$ dess komponent vinkelrät mot ytelementet, och integralen representerar den totala strömmen som flyter genom ytan D .

Vi kan beräkna integralen genom att parametrisera ytan D med parametrar s och t . Vi har då det vektoriella ytelementet

$$d\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right) ds dt. \quad (69)$$

Exempel: Vi beräknar integralen av det konstanta vektorfältet $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ över halvsfären D som ges av $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2, z > 0$: Vi kan parametrisera ytan med sfäriska koordinater $0 < \theta < \pi/2$ och $0 < \phi < 2\pi$ och får då

$$\begin{aligned} \int_D \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} v\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_r r_0^2 \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} v r_0^2 \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \pi v r_0^2. \end{aligned} \quad (70)$$

Exempel: Vi beräknar integralen av det elektriska fältet (24) från en punktladdning i origo över en sfär S med radie r_0 och centrum i origo:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \cdot \mathbf{e}_r dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{1}{r^2} dS \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0^2} 4\pi r_0^2 \\
&= \frac{q}{\epsilon_0}
\end{aligned} \tag{71}$$

oberoende av radien r_0 .

Övning: Beräkna integralen av det elektriska fältet (24) från en punktladdning i origo över det kvadratiske område D som ges av $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, $z = a$.

Volymintegraler

Ett skalärfält λ kan integreras över en volym Ω :

$$\int_{\Omega} \lambda dV. \tag{72}$$

Om vi parametriserar Ω med parametrar s , t och u så ges det volymselementet dV av

$$dV = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d\mathbf{r}}{du} \right) ds dt dv. \tag{73}$$

Mer specifikt så kan det uttryckas i Cartesiska, cylindriska eller sfäriska koordinater:

$$\begin{aligned}
dV &= dx dy dz \\
&= \rho d\rho d\phi dz \\
&= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.
\end{aligned} \tag{74}$$

Exempel: Antag att luftens densitet ρ varierar som $\rho = \rho_0 e^{-r/a}$, där ρ_0 och a är konstanter och r är avståndet till jordens medelpunkt. Den totala massan av luften i volymen Ω utanför radien r_0 är då

$$\begin{aligned}
m &= \int_{\Omega} \rho dV \\
&= \int_{r_0}^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \rho_0 e^{-r/a} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$= 4\pi\rho_0 e^{-r_0/a}(2a^3 + 2a^2r_0 + ar_0^2). \quad (75)$$

Övning: Antag att luftens densitet ρ varierar som $\rho = \rho_0 e^{-z/a}$, där ρ_0 och a är konstanter och z är en vertikal koordinat. Beräkna den totala massan av luften i den sfäriska volymen $x^2 + y^2 + z^2 \leq r_0^2$.
