

$\forall$ noterar att $a_3, a_4 \in \text{int}(C(0,1))$, d.v.

$$4 < \sqrt{24} < 5.$$



$$\text{Res}_{a_3} \left(\frac{4iz}{z^4 - 10z^2 + 1} \right) \underset{\text{RR4}}{=} \left(\frac{4iz}{4z^3 - 20z} \right)_{z=a_3} =$$

$$= \left(\frac{i}{a_3^2 - 5} \right) = -\frac{i}{\sqrt{24}}$$

$$\text{Res}_{a_4} \left(\frac{4iz}{z^4 - 10z^2 + 1} \right) \underset{\text{RR4}}{=} \left(\frac{4iz}{4z^3 - 20z} \right)_{z=a_4} = \frac{i}{a_4^2 - 5} = -\frac{i}{\sqrt{24}}.$$

$$\forall \text{ f\"or att } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{3 - \cos^2 t} \underset{\substack{\text{g} \\ \sqrt{3}}}{=} \int_{|z|=1} \frac{4iz}{z^4 - 10z^2 + 1} dz \underset{\text{RS}}{=} 2\pi i \left(-\frac{i}{\sqrt{24}} - \frac{i}{\sqrt{24}} \right) = \frac{4\pi}{\sqrt{24}} =$$

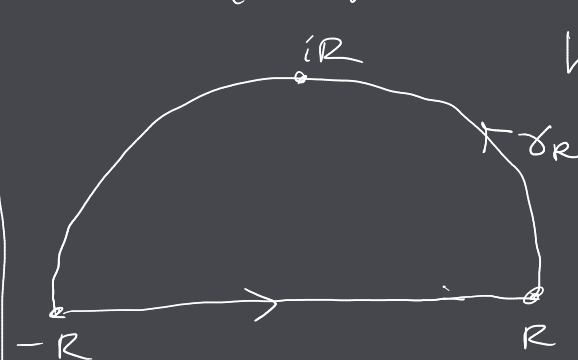
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

2b: Först noterar vi att eftersom $\frac{x^2}{(x^2+2)^2}$ är en jämn funktion så är

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2} dx,$$

$$\forall \text{ observerar } \Rightarrow \text{d.v. att } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R,R]} g(z) dz, \text{ d.v.}$$

$$g(z) := \frac{z^2}{(z^2+2)^2}.$$



här $\gamma_R(t) := Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, och

$$G_R := [-R, R] \cup \gamma_R$$

$\forall$ f\"or:

$$\int_{G_R} g(z) dz = \int_{[-R,R]} g(z) dz + \int_{\gamma_R} g(z) dz \quad *$$

beräknas via RS

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2)^2} dx$$

selektions, vi use $\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$

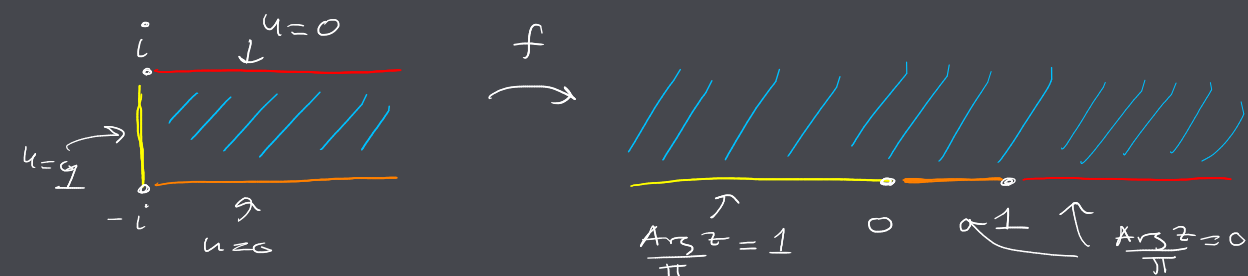
Uppskattning av felterm:

$$\left| \int_{\gamma_R} g(z) dz \right| \underset{\Delta \leq \int}{\leq} \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{z^2}{(z^2+2)^2} \right| \pi R \leq \left[\begin{array}{l} |z^2| = |z|^2 = R^2 \text{ p\"a } \gamma_R \\ |z^2+2|^2 = |z^2+2|^2 \geq |z|^2 - 2 \underset{\Delta \geq 2}{=} \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{l} |R^2 - 2|^2 = (R^2 - 2)^2 \text{ p\"a } \gamma_R, R \geq \sqrt{2} \\ \underset{R \geq \sqrt{2}}{\leq} \end{array} \right] \leq \frac{\pi R^3}{(R^2 - 2)^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Vi har alltså att $f(z) = \left(\frac{e^{\pi z/2} + i}{e^{\pi z/2} - i} \right)^2$.

Vi noterar också att f är en kontinuerlig fkn från $\{z: \operatorname{Re} z \geq 0, -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \setminus \{i\}$ till $\{z: \operatorname{Im} z \geq 0\}$, och att $f(\{z: \operatorname{Re} z = 0, -1 < \operatorname{Im} z < 1\}) = \{z: \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.



medan $f(\{z: \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| = 1\}) = \{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0, z \neq 1\}$.

Vi noterar också att $\frac{\operatorname{Arg} z}{\pi} = \operatorname{Re} \left(\frac{\operatorname{Log} z}{\pi} \right)$ enligt Prop. 5

en harmonisk fkn på det övre halvplanet som är

0 på den positiva reella axeln ≥ 1 på den negativa reella axeln. Den är också kontinuerlig $\geq$ begr. på

$$\{z: \operatorname{Im} z \geq 0, z \neq 0\}.$$

Enligt Kor. är då $u(z) := \frac{\operatorname{Arg}(f(z))}{\pi}$ harm. i A , kont. $\geq$ begr.

på $f^{-1}(\{z: \operatorname{Im} z \geq 0, z \neq 0\}) = \{z: \operatorname{Re} z \geq 0, -1 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \setminus \{i, -i\}$,

och $u=1$ på $f^{-1}(\{z: \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z = 0\}) = \{z: \operatorname{Re} z = 0, -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$

medan $u=0$ på $f^{-1}(\{z: \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0, z \neq 1\}) =$

$$= \{z: \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| = 1\}.$$

Vi får alltså att

$$u(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arg} \left(\left(\frac{e^{\pi z/2} + i}{e^{\pi z/2} - i} \right)^2 \right)$$

är en sådan funktion som söktes.

7: Enligt satsen om Taylorutveckling kan f

skrivas $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$. Enligt antagandet är

$$f(-z) = -f(z), \text{ så } 0 = f(z) + f(-z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (-z)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (1 + (-1)^k) z^k = \sum_{m=0}^{\infty} 2c_{2m} z^{2m} \Rightarrow c_{2m} = 0 \quad \forall m \geq 0, \quad \text{Lemma}$$

Detta betyder att $f(z) = c_1 z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \dots = z(c_1 + c_3 z^2 + c_5 z^4 + \dots)$

$$= z \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k} = z g(z^2), \text{ där } g(z) := \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^k.$$

Vi noterar att då f 's TV hade konvergera ∞ så är konvergera för $\sum_0^{\infty} c_{2k+1} z^k$ också ∞ , så enl. sat är g en hel funktion. Vi har alltså visat att f kan skrivas $f(z) = zg(z)$ där g hel funktion!

5: Cauchys integralformel

Om f holm i G , $\bar{D}(a, r) \subseteq G$, då är

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Bevis: Notera att $\int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz = \int_{|w|=r} \frac{1}{w} dw = 2\pi i$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $w = z-a \quad \text{FEX}$

$$\Rightarrow f(a) = f(a) \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{1}{z-a} dz}_{=1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

$$\text{Låt } A_t := \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=t} \frac{f(z)}{z-a} dz - f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=t} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz, \quad 0 < t \leq r.$$

Vill visa $A_r = 0$.

$$\frac{f(z)-f(a)}{z-a} \text{ holm i } G \setminus \{a\}, C(a, t) \sim_{G \setminus \{a\}} C(a, r)$$

$\Rightarrow_{CS} A_t$ oberoende av t !

Ide: Vill visa $A_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, för då följer det att $A_r = 0$!

$$|A_t| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z-a|=t} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \max_{|z-a|=t} \left| \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \right| 2\pi t = \Delta(t)$$

$$= \max_{|z-a|=t} |f(z)-f(a)| \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \text{ ty } f \text{ kont. i } a \text{ (holm} \Rightarrow \text{kont.)}. \square$$

6: Taylors utveckling av holm funkt

Antag f holm i $D(a, R)$. Då har f en Taylors utveckling

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_k (z-a)^k \text{ i } D(a, R), \text{ där}$$

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz, \quad 0 < r < R.$$

