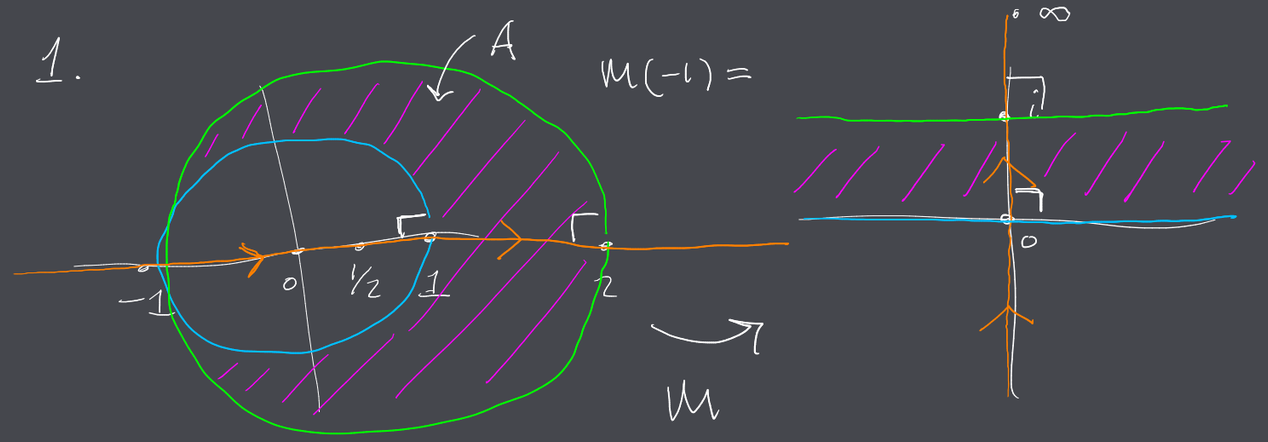
1.



$M(-1) = \infty$, $M(1) = 0$, $M(2) = i$

Vi ser att A begränsas av $C(0,1)$ o $C(1/2, 3/2)$, och därför kommer $M(A)$ begränsas av $M(C(0,1))$ o $M(C(1/2, 3/2))$.

Vi börjar med att notera att $M(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) \underset{\text{el. sats}}{=}$

$=$ cirk/linje genom $\infty, 0, i = i\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Vi får sedan att $M(C(0,1)) \underset{\text{el. sats}}{=}$ cirk/linj genom ∞ o 0 som tack vare konformitet också skär de imaginära axeln i rät vinkel

$= \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Vidare får vi att $M(C(1/2, 3/2)) =$ cirk/linj genom ∞ o i som skär imaginära axeln i rät vinkel $=$

$= \{z : \operatorname{Im} z = 1\} \cup \{\infty\}$.

$M(A)$ är därför antingen $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ el. $\{z : \operatorname{Im} z - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}\}$.

Då x går från -1 till 1 och sen till 2 går $M(x)$ från ∞ till 0 och sen till i (se figur) och detta visar att $M(A) = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

<u>Svar:</u> $M(A) = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$.

2. Vi noterar att $\sin(\frac{2}{z}) \operatorname{Log}(z+2)$ är holo i $D(0,2)$ förutom en isolerad singularitet i 0, så vi behöver beräkna residyn i 0.

$\sin\left(\frac{2}{z}\right)$ har LSU i $D(0,1)$: $\left(\frac{2}{z}\right) - \frac{\left(\frac{2}{z}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{2}{z}\right)^5}{5!} - \dots$

medan $\log(z+2)\Big|_{z=0} = \ln 2$ och för $k \geq 1$:

$$\log(z+2)^{(k)}\Big|_{z=0} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(z+2)^k}\Big|_{z=0} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{2^k}$$

villkoret (enl. sats) ger att $\operatorname{Log}(z+2)$ har LSU i $D(0,1)$:

$$\ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^2 \cdot 2} + \frac{z^3}{2^3 \cdot 3} - \frac{z^4}{2^4 \cdot 4} + \dots$$

Vi får därför att i $D(0,1)$:

$$\sin\left(\frac{2}{z}\right)\operatorname{Log}(z+2) = \left(\frac{2}{z} - \frac{2^3}{3!\,z^3} + \dots\right)\left(\ln 2 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^2 \cdot 2} + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(2\ln 2 - \frac{2^3}{3!}\left(-\frac{1}{2^2 \cdot 2}\right) + \frac{2^5}{5!}\left(-\frac{1}{2^4 \cdot 4}\right) - \dots\right) + \sum_{k \neq -1} a_k z^k,$$

dvs $\operatorname{Res}_0\left(\sin\left(\frac{2}{z}\right)\operatorname{Log}(z+2)\right) =$

$$= 2\ln 2 + \frac{2}{3! \cdot 2} - \frac{2}{5! \cdot 4} + \frac{2}{7! \cdot 6} - \dots =$$

$$= 2\ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,k}.$$

Det följer att: $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2}{z}\right)\operatorname{Log}(z+2)\,dz \underset{RS}{=}$

$$= 2\pi i\left(2\ln 2 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,k}\right).$$

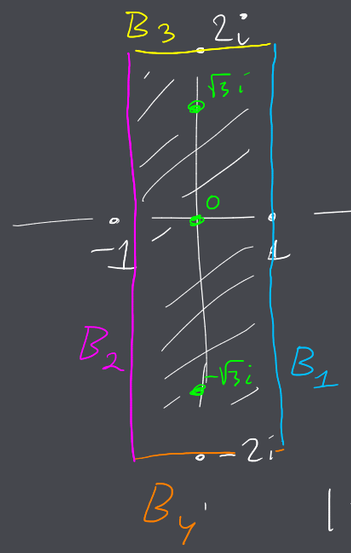
<u>Svar:</u> $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{2}{z}\right)\operatorname{Log}(z+2)\,dz = 2\pi i\left(2\ln 2 + \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!\,k}\right).$

3. Vi tänker använda Rouchés sats, med $f(z) := z^3 + 3z$, $g(z) := e^z/3$.

Vi noterar att dessa är holo i $\mathbb{C}$.

Vi ser också att $z^3+3z = z(z-\sqrt{3}i)(z+\sqrt{3}i)$ har nollst. i $0, \pm\sqrt{3}i$, dvs 3 st nollst. i

$A := \{z : -1 < \operatorname{Re} z < 1,\ -2 < \operatorname{Im} z < 2\}$.



Vi vill nu visa att $|f(z)| > |g(z)|$ på ∂A.

Vi delar upp ∂A i fyra bitar, B_1, B_2, B_3 o B_4 som i figur.

På B_1 ser vi att avståndet till vart och ett av nollställena är ≥ 1, så

$$|z^3+3z| = |z||z-\sqrt{3}i||z-(-\sqrt{3}i)| \geq 1\cdot 1\cdot 1 = 1,$$

och samma sak gäller på B_2. På B_3 ser vi att $|z| \geq 2$, $|z-\sqrt{3}i| \geq 2-\sqrt{3}$ o $|z-(-\sqrt{3}i)| \geq 2+\sqrt{3}$, så $|z^3+3z| \geq 2\cdot(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 2(4-3) = 2$, och på samma sätt får vi att $|z^3+3z| \geq 2$ på B_4.

Sammantaget får vi alltså att $|f(z)| \geq 1$ på ∂A.

Å andra sidan har vi att

$$|g(z)| = |e^z/3| = \frac{e^{\operatorname{Re} z}}{3} \leq \frac{e^1}{3} < 1 \text{ på } \partial A$$

ty $\operatorname{Re} z \leq 1$ på ∂A.

Vi får alltså att $|f(z)| > |g(z)|$ på ∂A, och enligt Rouchés sats har alltså $z^3+3z+\frac{e^z}{3}$ lika många nollst. i A som z^3+3z har, dvs 3 st.

<u>Svar:</u> $z^3+3z+\frac{e^z}{3}$ har 3 nollst. i A.

4. Se lösningsförslag från tidigare tentor med denna typ av uppgift.

5. En lösning ges av att använda standardmetoder för att hitta LSU av $\frac{1}{(1+2z)^3}$ centr. i 0 och konv. i $A(0, \frac{1}{2}, \infty)$, men man kan också hitta svaret genom att använda tabellen.

Vi ser att $\frac{1}{(1+2z)^3} = \frac{1}{(2(z+\frac{1}{2}))^3} = \frac{1}{2^3}\frac{1}{(z-(-\frac{1}{2}))^3}$.

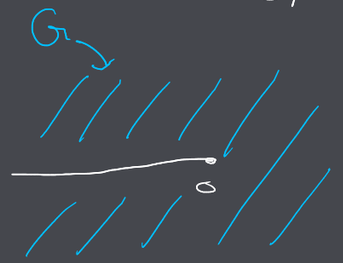
Enligt tabell har följden $b_k := \begin{cases} 0, & k \le 2 \\ \binom{k-1}{2}(-\frac{1}{2})^{k-3}, & k \ge 3 \end{cases}$

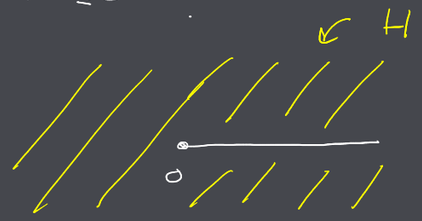
Z-transformen $\frac{1}{(z-(-\frac{1}{2}))^3}$, och tack vare Z-trans. linearitet får vi att följden $a_k := \begin{cases} 0, & k \le 2 \\ \frac{(-1)^{k+1}(k-1)(k-2)}{2^{k+1}}, & k \ge 3 \end{cases}$

har Z-transform $\frac{1}{2^3}\frac{1}{(z-(-\frac{1}{2}))^3} = \frac{1}{(1+2z)^3}$.

<u>Svar:</u> $a_k := \begin{cases} 0, & k \le 2 \\ \frac{(-1)^{k+1}(k-1)(k-2)}{2^{k+1}}, & k \ge 3 \end{cases}$.

8. Låt $G := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\le 0}$ och $H := \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\ge 0}$





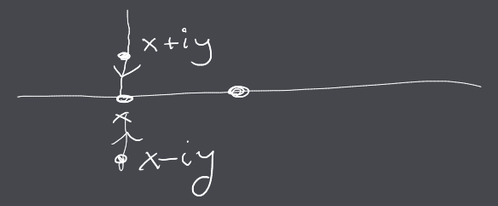
Eftersom både G o H är enkelt sammanhängande finns det enligt sats en holo fkn f i G s.a. $u = \operatorname{Re} f$ i G, och en holo fkn g i H s.a. $u = \operatorname{Re} g$ i H.

$v := \operatorname{Im} f$ är då ett harmoniskt konjugat till f i G. Låt $w := \operatorname{Im} g$.

Notera att $f-g$ är holo i det öppna övre halvplanet, och då $\operatorname{Re}(f-g) = u-u = 0$ och det övre halvplanet är sammanhängande följer det från CRs ekv. att $f-g$ är konstant i det öppna övre halvplanet, säg $f = g + iC_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, dvs $v = w + C_1$ för någon reell konst. C_1.

På samma sätt får vi att $v = w + C_2$ för någon reell konst. C_2 i det öppna <u>nedre</u> halvplanet. Vi noterar också att då g är holo i det öppna vänstra halvplanet är w kontinuerlig där.

Vi ser nu att om $x<0$: $\lim_{y\to 0+}\left(v(x+iy)-v(x-iy)\right)=$



$$=\lim_{y\to 0+}\left(w(x+iy)+C_1-w(x-iy)-C_2\right)=$$

$$=C_1-C_2$$ tack vare w:s kont.

Vi ser alltså att gränsvärdet existerar och är oberoende av $x<0$, vilket skulle visas.