

DUGGA 1, 14 SEPTEMBER 2019 - SVAR

A.

- 1a
- 2d
- 3b
- 4b
- 5b
- 6c
- 7a
- 8a
- 9b
- 10d
- 11b
- 12c
- 13a
- 14b
- 15a

B.

- 16: $-\frac{224}{155}$
- 17: -1
- 18: $\frac{3\pi}{2}$
- 19: 1
- 20: -2

C. *Lösning:* Vi flyttar över alla termer till högerledet och skriver på gemensam nämnare; den givna olikheten är ekvivalent med

$$\frac{2x^2 + (3-p)x + 3}{x^2 + x + 1} > 0.$$

Nämnamren är positiv för alla reella x . Det som krävs är alltså att hitta alla reella p sådana att

$$2x^2 + (3-p)x + 3 > 0$$

för alla reella x . Kvadratkomplettering ger

$$2x^2 + (3-p)x + 3 = 2 \left(\left(x + \frac{3-p}{4} \right)^2 - \left(\frac{3-p}{4} \right)^2 + \frac{3}{2} \right).$$

Koefficienten för x^2 är positiv, vilket betyder att uttrycket kommer att vara positivt för alla reella x om och endast om

$$\frac{3}{2} - \left(\frac{3-p}{4} \right)^2 = \frac{-p^2 + 6p + 15}{16} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 - 6p - 15 < 0.$$

Den sista olikheten gäller om och endast om p ligger strikt mellan de två nollställena till polynomet $t^2 - 6t - 15$. Vi får slutligen att den givna olikheten är sann för alla reella x om och endast om

$$3 - 2\sqrt{6} < p < 3 + 2\sqrt{6}.$$