

TMA970

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM

Datum: 2022-10-26, kl. 8:30 – 12:30.

Hjälpmedel: Inga

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent / divergent.

$$\text{(a)} \int_0^\pi \frac{\sqrt{x} \sin x}{(\ln(x+1))^2} dx; \quad \text{(b)} \int_2^\infty \frac{x^2 e^{-x}}{x-1} dx; \quad \text{(c)} \int_0^\infty \frac{\ln(x^4+1)}{x^2+1} dx.$$

Avgör om påståendena nedan är sanna eller falska. Ge endast svar, det vill säga sant/falskt. Funktionen f antas vara definierad i $[a, b]$.

(d) Om f är Riemannintegrerbar i $[a, b]$, så är f kontinuerlig i $[a, b]$.

(e) Om f är kontinuerlig i $[a, b]$, så är f Riemannintegrerbar i $[a, b]$.

(f) Om f är deriverbar i $[a, b]$, så är f Riemannintegrerbar i $[a, b]$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1 p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$\text{(a)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (3\text{p}); \quad \text{(b)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \sin x}{x \ln x + \cos x} \quad (3\text{p}).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \cos^2 \sqrt{x}$. (3p)

(b) Beräkna $\int_0^4 \frac{1 + e^{x/2}}{(1 + e^{x/4})^2} dx$. (3p)

5. Betrakta funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, där $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Visa att f är en udda funktion. Bestäm f 's värdemängd och finn f^{-1} . (5p)

6. Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ är kontinuerlig och icke-negativ i intervallet $[a, b]$ samt sådan att $f(x_0) > 0$ i någon punkt $x_0 \in [a, b]$. Visa att

$$\int_a^b f(x) dx > 0. \quad (6\text{p})$$

7.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion i en punkt. (2p)

(b) Visa att om en funktion är deriverbar i en punkt, så är den kontinuerlig i den punkten. (3p)

(c) Visa att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är deriverbar i hela $\mathbb{R}$, men att dess derivata inte är kontinuerlig i 0. (4p)

8. Formulera och bevisa analysens huvudsats (Newton-Leibniz sats). (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM