

TMA970

Matematik Chalmers

Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM

Datum: 2023-01-05, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$(a) \int_1^\infty \frac{x \ln x}{x^3 + 1} dx; \quad (b) \int_0^1 x \sqrt{|\ln x|}; \quad (c) \int_0^9 \frac{dx}{3 - \sqrt{x}}.$$

Nedan gäller $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, och F är en primitiv till f i $\mathbb{R}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Det följer att funktionen F är deriverbar i $\mathbb{R}$.

(e) Det följer att funktionen F är kontinuerlig i $\mathbb{R}$.

(f) Det följer att funktionen f är kontinuerlig i $\mathbb{R}$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1 p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln(x^3 - 1)} \quad (3p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}, \quad m, n \in \mathbb{N} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{2x - 1}{(x - 1)^2}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (6p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \ln^2 x$. (3p)

(b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{2 \sin x - \cos x + 5}$. (3p)

5. För en Riemannintegrerbar funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieras dess integralmedelvärde över intervallet $[a, b]$ som $M(f) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$. Beräkna integralmedelvärdet av funktionen $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ över intervallet $[0, 2\pi]$. (5p)

6. Visa att följderna $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, är avtagande och nedåt begränsad. (5p)
Visa att $b_n > e$ för alla $n \in \mathbb{N}$. (2p)

7. Funktionerna f och g är definierade i mängden $D \subset \mathbb{R}$ och punkten x_0 är hopningspunkt för D . Givet att $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ och $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, visa att gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x)$ finns och är lika med AB . (6p)

Anmärkning. Du kan välja mellan $x_0 \in \mathbb{R}$ och $x_0 = -\infty$; A och B är reella tal.

8.(a) Definiera begreppet deriverbar funktion i en punkt. (2p)

(b) Formulera och bevisa analysens huvudsats (Newton-Leibniz sats). (6p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM