

TMA970**Matematik Chalmers****Tentamensskrivning i Inledande matematisk analys F / TM**

Datum: 2023-08-25, kl. 8:30 - 12:30.

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa.

Telefonvakt: Jana Madjarova, ankn. 3531

=====

1. Avgör om integralerna nedan konvergerar eller divergerar. Ge endast svar, d.v.s. konvergent/divergent.

$$(a) \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}; \quad (b) \int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x}; \quad (c) \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-x}}{x^2+1} dx.$$

Nedan gäller $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ och f' är derivatan till f i $\mathbb{R}$. Avgör om påståendena är sanna eller falska. Ge endast svar, sant/falskt.

(d) Om $f(x) > 0$ för $x > 0$, så gäller $f'(x) > 0$ för $x > 0$.

(e) Om $f'(x) > 0$ för $x > 0$, så gäller $f(x) > 0$ för $x > 0$.

(f) Om $f'(x) \neq 0$ för $x > 0$, så gäller $f(x) \neq 0$ för $x > 0$.

(Varje rätt svar ger 1p, varje fel svar ger -1p, inget svar ger 0p; hela uppgiften ger minst 0p.)

2. Bestäm gränsvärdena (L'Hospitals regel och Taylorutvecklingar får ej användas)

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \quad (3p); \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} \quad (3p).$$

3. Rita grafen till funktionen $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-|x|}}$. Ange asymptoter, lokala extrema, inflexionspunkter etc. (7p)

4.(a) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = \frac{1}{\cos^4 x}$. (3p)

(b) Beräkna $\int_0^2 x e^{\sqrt{x}} dx$. (3p)

5. Givet är funktionen

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x-1}\right).$$

Bestäm funktionens definitionsmängd. Kan man utvidga f så att den blir kontinuerlig i hela $\mathbb{R}$? Om ja, förklara hur; om nej, förklara varför. (5p)

6. Bestäm alla deriverbara (i $\mathbb{R}$) funktioner φ sådana att funktionen $f(x) = |x-a|\varphi(x)$ (där a är ett reellt tal) är deriverbar i hela $\mathbb{R}$. (5p)

7.(a) Definiera begreppet bijektiv funktion. (2p)

(b) Formulera och bevisa satsen om invers funktions derivata. (6p)

8.(a) Formulera analysens huvudsats (Newton-Leibniz sats). (2p)

(b) Bevisa insättningsformeln och ge exempel på hur den används. (5p)

Betygsgränser: 20-29p ger betyget 3; 30-39p ger betyget 4; 40p+ ger betyget 5.

/JM