

Några summor och serier för kursen MVE091

Erik I. Broman

I denna kurs kommer vi ofta att stöta på geometriska summor, binomialsummor och Taylor-utveckling (mestadels av e^x). Syftet med detta dokument är att ge en kort uppfräschning av dessa.

1 Geometriska summor

Vi börjar med att betrakta ändliga och sedan oändliga geometriska summor.

Ändlig geometrisk summa: För varje heltal $n \geq 1$ och varje $x \in \mathbb{R}$ sådan att $x \neq 1$ har vi att

$$\boxed{\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.} \quad (1)$$

Bevis: Låt $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$ och observera att

$$xS_n = x \sum_{k=0}^n x^k = \sum_{k=0}^n x^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} x^k.$$

Idén är att S_n och xS_n är "nästan samma" så att

$$(x - 1)S_n = xS_n - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} x^k - \sum_{k=0}^n x^k = x^{n+1} - 1.$$

Vi ser därför att

$$S_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

□

Oändlig geometrisk summa: Vi antar nu att $|x| < 1$ (annars kan summan i (1) inte konvergera när $n \rightarrow \infty$). Genom att låta $n \rightarrow \infty$ i ekvation (1) ser vi att

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} = \frac{-1}{x - 1} = \frac{1}{1 - x},$$

där vi utnyttjar att $x^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$ om $|x| < 1$. Vi får alltså att

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}.} \quad (2)$$

2 Binomialsumma

Binomialsatsen säger att

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = (a + b)^n} \quad (3)$$

”Bevis”: Uppenbarligen har vi att

$$(a + b)^n = \gamma_n a^n b^0 + \gamma_{n-1} a^{n-1} b^1 + \dots + \gamma_k a^k b^{n-k} + \dots + \gamma_0 a^0 b^n \quad (4)$$

och vad vi behöver göra är att bestämma γ_k för $k = 0, 1, \dots, n$. Vi skriver därför ut $(a + b)^n$ i ”långform”:

$$(a + b)^n = \underbrace{(a + b)(a + b) \cdots (a + b)}_{n \text{ gånger}}.$$

Om vi nu betraktar termen $\gamma_k a^k b^{n-k}$ från (4) så ser vi att den dyker upp i den ”långa” produkten här ovanför om vi väljer a från exakt k av de n paranteserna $(a + b)$. På hur många sätt kan detta ske? Vi skall alltså välja k paranteser av n möjliga som får bidra med ett a (så att resterande bidrar med ett b). Vi väljer alltså k objekt ur en samling med n och vi får då att

$$\gamma_k = \binom{n}{k}.$$

□

3 Taylorutveckling

Enligt Taylors sats har vi att

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(x_0)\frac{(x - x_0)^k}{k!}. \quad (5)$$

för "snälla" funktioner $f(x)$. I denna kurs kommer vi (nästan?) utslutande att betrakta fallet då $x_0 = 0$ och då skriver vi att

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!},$$

vilket ibland kallas för McLaurin's sats. Sättet vi använder resultatet på är oftast genom att betrakta utvecklingen med några termer plus en felterm:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + O(x^2) \text{ eller } f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + O(x^3),$$

där $O(\cdot)$ är den så kallade stora Ordo. Något förenklat betyder $O(x^n)$ att denna felterm går mot 0 (ungefär) lika snabbt som x^n .

Den i särklass vanligaste utvecklingen i denna kurs kommer vara den för e^x . I detta fall har vi att

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

med approximationerna

$$e^x = 1 + x + O(x^2) \text{ eller } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x^3).$$

Taylorutveckling är mycket användbart. Betrakta t.ex. följande gränsvärde:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{e^x - 1}.$$

Problemet här är att både nämnare och täljare går mot 0 då $x \rightarrow 0$. Men, om vi Taylorutvecklar ser vi följande:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - 1}{e^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + ax + O(x^2) - 1}{1 + x + O(x^2) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + O(x^2)}{x + O(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a + O(x)}{1 + O(x)} = \frac{a + 0}{1 + 0} = a. \end{aligned}$$

Ett svårberäknat gränsvärde har blivit enkelt.