3.8: Låt X ha följande täthetsfkn:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$	.02	.03	.05	.2	.4	.2	.07	?

a) Hitta $f(8)$

L: Vi använder att $1 = \sum_{\text{alla } x} f(x) = \sum_{k=1}^{8} f_X(k)$

$$= \sum_{k=1}^{8} \mathbb{P}(X=k)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X=8) = 1 - \sum_{k=1}^{7} \mathbb{P}(X=7) = 0.03 //$$

b) Hitta tabellen för F.

L: Vi har att $F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$.

Den hoppar bara i punkterna $1, 2, .., 8$.

$$F(1) = \mathbb{P}(X \le 1) = \mathbb{P}(X=1) = 0.02$$

$$F(2) = \mathbb{P}(X \le 2) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = 0.02 + 0.03 = 0.05$$

$$F(3) = \sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(X=k) = 0.02 + 0.03 + 0.05 = 0.1$$

$F(4) = .. = 0.3$, $F(5) = .. = 0.7$, $F(6) = .. = 0.9$

$F(7) = .. = 0.97$ $F(8) = .. = 1$

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	0.02	0.05	0.1	0.3	0.7	0.9	0.97	1

//

c) Vad är sann. att $3 \leq X \leq 5$ (anv. F).

L:

$$\mathbb{P}(3 \leq X \leq 5) = \mathbb{P}(X \leq 5) - \mathbb{P}(X < 3)$$

$$= \mathbb{P}(X \leq 5) - \mathbb{P}(X \leq 2) = F(5) - F(2)$$

$$= 0.7 - 0.05 = 0.65 \ //$$

d) Beräkna $\mathbb{P}(X \leq 4)$ & $\mathbb{P}(X < 4)$

L:

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = F(4) = 0.3$$

$$\mathbb{P}(X < 4) = \mathbb{P}(X \leq 3) = F(3) = 0.1 \ //$$

e) Bestäm $F(-3)$ och $F(10)$

L:

$$F(-3) = \mathbb{P}(X \leq -3) = 0$$

$$F(10) = \mathbb{P}(X \leq 10) = \mathbb{P}(X=1) + \dots + \mathbb{P}(X=8)$$
$$= 1 \ //$$

3.15: (forts. på 3.8).

a) Bestäm $\mathbb{E}[X]$ och $\mathbb{E}[X^2]$

L: Enligt def. så är

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\text{alla } x} x f(x) = \sum_{k=1}^{8} k \, \mathbb{P}(X=k)$$

$= 1\cdot 0.02 + 2\cdot 0.03 + 3\cdot 0.05 + \dots + 8\cdot 0.03$

$= 4.96$ //

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{\text{alla } x} h(x) f(x) = \sum_{k=1}^{8} h(k)\,\mathbb{P}(X=k)$$

Här är $h(X) = X^2$.

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^{8} k^2\,\mathbb{P}(X=k) = 1^2\cdot 0.02 + 2^2\cdot 0.03 + \dots + 8^2\cdot 0.03$$

$= 26.34$ //

b) Hitta $\mathrm{Var}(X)$ och σ_X

L: Enl. def. har vi att

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 26.34 - 4.96^2$$

≈ 1.7384

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{1.7384} \approx 1.3185$$ //

3.34: Def: S.V. X är likformigt fördelad på mängden A där $|A| < \infty$ (dvs # element i A är ändligt) om

$$f(x) = \frac{1}{|A|} \quad \text{för varje } x \in A.$$

Anm: 1) Sannolikheten att X antar värdet x är alltså lika stor för varje val av $x \in A$.

2) Vi skriver $X \sim U(A)$ "uniform"

Låt $A = \{0, 1, \dots, 9\}$, och låt $X \sim U(A)$.

a) Beräkna $m_X(t)$.

L: Vi har att

$$m_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{9} e^{tk} \, \mathbb{P}(X = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{9} (e^t)^k \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10} \sum_{k=0}^{9} (e^t)^k = \{\text{geom. summa}\}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{e^{10t} - 1}{e^t - 1}. \quad //$$

b) Använd a) för att beräkna $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ och σ^2.

L: Vi har att $\mathbb{E}[X] = m_X'(0)$

$$= \frac{d}{dt} \frac{1}{10} \cdot \frac{e^{10t} - 1}{e^t - 1} \Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{10 e^{10t}(e^t - 1) - (e^{10t} - 1) e^t}{(e^t - 1)^2} \Bigg|_{t=0}$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{9e^{11t} - 10e^{10t} + e^{t}}{(1-e^{t})^2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{e^{t}}{10} \cdot \frac{9e^{10t} - 10e^{9t} + 1}{(1-e^{t})^2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{e^{t}}{10} \cdot \frac{9\left(1+10t+\frac{(10t)^2}{2!} + \mathcal{O}(t^3)\right) - 10\left(1+9t+\frac{(9t)^2}{2!} + \mathcal{O}(t^3)\right) + 1}{(1-(1+t+\mathcal{O}(t^2)))^2} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{e^{t}}{10} \cdot \frac{t^2 \frac{900-810}{2} + \mathcal{O}(t^3)}{t^2 + \mathcal{O}(t^3)} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{e^{t}}{10} \cdot \frac{45 + \mathcal{O}(t)}{1 + \mathcal{O}(t)} \Big|_{t=0} = \frac{1}{10} \cdot 45 = 4{,}5$$

"Tungt!"

Insert t Mathematica: $\mathbb{E}[X] = 4.5$, $\mathbb{E}[X^2] = \frac{57}{2}$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{57}{2} - \frac{9}{2} = \frac{48}{2} = 24$$

Alt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{\text{all } x} x \, \mathbb{P}(X=x) = \sum_{k=0}^{9} k \cdot \frac{1}{10} = 4.5$

$$\mathbb{E}[X^2] = \quad '' \quad x^2 \quad '' \quad = \sum_{k=0}^{9} k^2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{57}{2}$$

3.41: 80 % av alla printers fungerar direkt efter installation. En återförsäljare säljer 10 enheter under en given månad.

a) Vad är sann. att minst 9 av dessa fungerar direkt?

L: Låt X = # fungerande printers (av de 10).

Vi ser att $X \sim \text{Bin}(10, \frac{8}{10})$.

Vi söker

$$\mathbb{P}(X \geq 9) = \mathbb{P}(X = 9) + \mathbb{P}(X = 10)$$

$$= \binom{10}{9} 0{,}8^9 \cdot 0{,}2 + \binom{10}{10} 0{,}8^{10} \approx 0{,}3758 //$$

b) Betrakta nu 5 månader under vilka 10 printers säljs/månad. Vad är sann. att minst 9 enheter fungerar varje månad?

L: Det är rimligt att tro att enheterna fungerar oberoende av varandra.

Om F_n = minst 9 fungerar månad n

får vi att $\mathbb{P}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_5) = \prod_{n=1}^{5} \mathbb{P}(F_n)$

$$= \mathbb{P}(F_1)^5 \approx (0{,}3758)^5 //$$

3.64: Kalifornien har i genomsnitt en destruktiv jordbävning varje år.

a) Vad är sann. att Kalifornien har minst en destr. jordb. under ett halvår?

L: Vi räknar händelser under en tids-period. Vi använder därför Poisson-processen! Låt α = intensiteten = 1 (jordb./år)

$\Rightarrow$ X = # destr. jordb. under 6 mån

$$\sim Poi(\alpha \cdot \tfrac{1}{2}) = Poi(\tfrac{1}{2}).$$

Vi söker $P(X \geq 1) \overset{(!)}{=} 1 - P(X=0)$

$$= 1 - \frac{(1/2)^0}{0!} e^{-1/2} = 1 - e^{-1/2} \approx 0,3935$$ //

b) Är det ovanligt att de har 3 eller fler destr. jordb. under ett halvår?

L: Vi söker $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2)$$

$$= 1 - \frac{(1/2)^0}{0!} e^{-1/2} - \frac{1/2}{1!} e^{-1/2} - \frac{(1/2)^2}{2!} e^{-1/2} \approx$$

$$= 1 - e^{-1/2}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8}\right) \approx 0,0144$$, dvs 1.4 %

så ja! //