

4.50: Låt $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vi har att

$P(|\bar{X} - \mu| < 3\sigma) = 0.997$. Vilken uppskattning av sannolikheten ger Chebyshev's olikhet?

2: kontroll:

$$P(|\bar{X} - \mu| < 3\sigma) = P\left(\frac{|\bar{X} - \mu|}{\sigma} < 3\right) = P(|Z| < 3)$$

$$= P(-3 < Z < 3) = F_Z(3) - F_Z(-3)$$

tab. sid 697/698

$$\approx 0.9987 - 0.0013 = 0.9974 \quad \text{ok.}$$

Cheb: $P(|\bar{X} - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} = \{k=3\} = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow P(|\bar{X} - \mu| < 3\sigma) = 1 - P(|\bar{X} - \mu| \geq 3\sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\approx 0.889.$$

"not great not terrible"

4.70

Låt s.v. X ha t.f.kn

$$f_X(x) = \frac{x}{4} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{8}$$

och låt $Y = X + 3$.a) Best. $E[X]$ o $E[Y]$ mha räkne regler för E

L:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{\sqrt{8}} \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{8}} = \frac{8^{3/2}}{12}$$

O

$$E[Y] = E[X+3] = E[X] + 3 = \frac{8^{3/2}}{12} + 3 //$$

b) Hitta $f_Y(y)$.

L: Vi har att $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X+3 \leq y)$
 $= P(X \leq y-3) = F_X(y-3) \Rightarrow f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y-3)$

Vidare är

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(s) ds = \int_0^x \frac{s}{4} ds = \left[\frac{s^2}{8} \right]_0^x = \frac{x^2}{8} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{8}$$

(0 annars)

S.a.

$$F_X(y-3) = \frac{(y-3)^2}{8} \quad \text{för } 3 \leq y \leq \sqrt{8} + 3$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} \frac{(y-3)^2}{8} = \frac{y-3}{4} \quad \text{för } 3 \leq y \leq \sqrt{8} + 3 //$$

c) Ber. $E[Y]$ mha b).

L:

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_3^{3+\sqrt{8}} y \frac{y-3}{4} dy = \left\{ y = y-3+3 \right\}$$

$$= \int_3^{3+\sqrt{8}} \frac{(y-3)^2}{4} dy + 3 \int_3^{3+\sqrt{8}} \frac{y-3}{4} dy$$

$$= \left[\frac{(y-3)^3}{12} \right]_3^{3+\sqrt{8}} + 3 \left[\frac{(y-3)^2}{8} \right]_3^{3+\sqrt{8}}$$

$$= \frac{8^{3/2}}{12} - 0 + 3 \left(\frac{8}{8} - 0 \right) = \frac{8^{3/2}}{12} + 3 //$$

5.4 Låt (X, Y) ha gemensam t.f.h.n

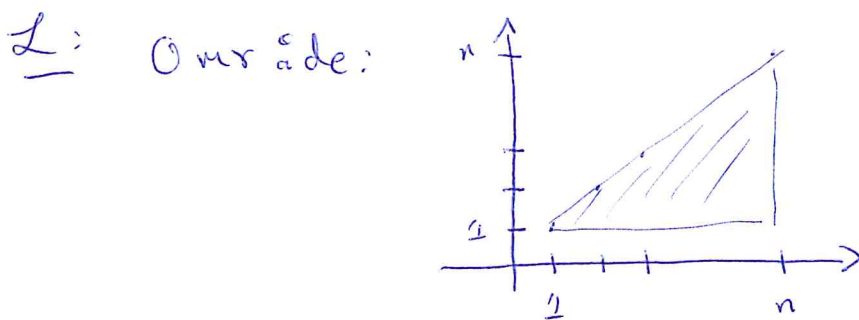
$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{2}{n(n+1)} \quad \text{för } 1 \leq y \leq x \leq n \quad n \in \mathbb{N} \quad n > 0.$$

a) Verifiera att detta är en t.f.h.n.

Hint: $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\begin{aligned} \underline{\text{L:}} \quad \sum_x \sum_y f_{X,Y}(x,y) &= \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^x \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^x 1 \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{x=1}^n x = \frac{2}{n(n+1)} \frac{n(n+1)}{2} = 1 // \end{aligned}$$

b) Hitta marg.-t.f.h.n för X resp. Y .



$$f_X(x) = \sum_y f_{X,Y}(x,y) = \sum_{y=1}^x \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{y=1}^x 1 = \frac{2x}{n(n+1)}$$

för $1 \leq x \leq n$.

$$f_Y(y) = \sum_x f_{X,Y}(x,y) = \sum_{x=y}^n \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)} (n-y+1) //$$

för $1 \leq y \leq n$

c) Är X, Y obero?

2: Nei ty

$$f_{\underline{X}\underline{Y}}(x,y) = \frac{2}{n(n+1)} \neq \frac{2x}{n(n+1)} \cdot \frac{2(n-y+1)}{n(n+1)} = f_{\underline{X}}(x)f_{\underline{Y}}(y) //$$

d) Berechna $P(\underline{X} \leq 3, \underline{Y} \leq 2)$, $P(\underline{X} \leq 3) \neq P(\underline{Y} \leq 2)$
om $n=5$.

2:
$$P(\underline{X} \leq 3, \underline{Y} \leq 2) = \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^2 f_{\underline{X}\underline{Y}}(x,y)$$

$$= P(\underline{X}=1, \underline{Y}=1) + P(\underline{X}=2, \underline{Y}=1) + \dots = 2, = 2 + \dots$$

$$= 5, \frac{2}{n(n+1)} = \frac{10}{5 \cdot 6} = \frac{1}{3} //$$

$$P(\underline{X} \leq 3) = \sum_{x=1}^3 \frac{2x}{n(n+1)} = \frac{2}{5 \cdot 6} (1+2+3) = \frac{2}{5} //$$

$$P(\underline{Y} \leq 2) = \sum_{y=1}^2 \frac{2(n-y+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{5 \cdot 6} ((5-1+1) + (5-2+1))$$

$$= \frac{2}{5 \cdot 6} (4+4) = \frac{18}{5 \cdot 6} = \frac{3}{5} //$$

speziell

$$P(\underline{X} \leq 3, \underline{Y} \leq 2) = \frac{1}{3} \neq \frac{6}{25} = P(\underline{X} \leq 3) P(\underline{Y} \leq 2) //$$

5.20: Låt (X, Y) ha gemensam t.f.kn

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{6640} (4x + 2y + 1) \quad \text{för} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$

Här är X = temperatur (°C)

Y = tid för en dieselmotor att starta (min)

a) Tror vi att $\text{Cov}(X, Y)$ är pos eller neg?

L: Om X är låg så är antagligen

Y hög. Därför bör $\text{Cov}(X, Y)$ vara neg. //

b) Beräkna $E[X]$, $E[Y]$, $E[XY]$ & $\text{Cov}(X, Y)$.

L: Vi startar med att beräkna

$f_X(x)$ och $f_Y(y)$. (Egentligen övn 5.8).

Vi har att

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_0^2 \frac{1}{6640} (4x + 2y + 1) dy$$

$$= \frac{1}{6640} [4xy + y^2 + y]_0^2 = \frac{4x+3}{3320} //$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx = \int_0^{40} \frac{1}{6640} (4x + 2y + 1) dx$$

$$= \frac{1}{6640} [2x^2 + 2xy + x]_0^{40} = \frac{2y+81}{166} //$$

Vi ser att

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^{40} x \frac{4x+3}{3320} dx = \frac{1}{3320} \int_0^{40} 4x^2 + 3x dx$$

$$= \frac{1}{3320} \left[\frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \right]_0^{40} = \dots = \frac{6580}{249} \quad (\approx 26.4)$$

och att

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \frac{2y+81}{166} dy = \frac{1}{166} \int_0^2 2y^2 + 81y dy$$

$$= \frac{1}{166} \left[\frac{2y^3}{3} + \frac{81y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{251}{249} \quad (\approx 1.01).$$

Vidare är

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_{XY}(x,y) dx dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{40} xy \frac{4x+2y+1}{6640} dx dy$$

$$= \int_0^2 y \frac{1}{6640} \int_0^{40} 4x^2 + 2xy + x dx dy$$

$$= \int_0^2 \frac{y}{6640} \left[\frac{4x^3}{3} + x^2 y + \frac{x^2}{2} \right]_0^{40} dy = \dots = \frac{6620}{249}$$

 $\Rightarrow$

$$\text{Cov}(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$$

$$= \frac{6620}{249} - \frac{6580}{249} \cdot \frac{251}{249} = \dots = -\frac{397}{7692} //$$