

4.54: En hemisk process ger 70% avkastning. En ny process härdas ge bättre resultat i minst 90% av fallen. Den nya processen testas 60 ggr. Låt $X = \#$ ggr den nya processens avkastning överstiger 70%.

a) Om sann. att avkastningen ökar är 0.9 är då normalapprox lämplig?

L: Vi har att $X \sim \text{Bin}(n, p)$ med $n=60$ och $p=0.9$ (om påst. sant). Vi har att

$$X \approx N(np, np(1-p)) \quad \text{om} \quad \left(\begin{array}{l} \text{boken: } np > 5 \text{ \& } n(1-p) > 5 \\ p \cdot 121 \quad p \leq 0.5 \quad p > 0.5 \end{array} \right).$$

Här är $p > 0.5$ och $n(1-p) = 60 \cdot 0.1 = 6$ så OK.

$$X \approx N(60 \cdot 0.9, 60 \cdot 0.9 \cdot 0.1) = N(54, 5.4) //$$

b) Om $p=0.9$, vad är $E[X]$?

L: $E[X] = np = 54 //$

c) Om $p > 0.9$ som påstås kommer i snitt fler än 54 av 60 försök producera ökad avkastning. Låt oss acceptera påståendet om $X \geq 59$.

Vad är sann. att vi accepterar påst.
om p i realiteten bara är 0.9?

L: Vi söker $P(X \geq 59)$ om $X \sim \text{Bin}(60, 0.9)$.

Vi har att $X \approx N(54, 5.4)$ så att

$$\frac{X - 54}{\sqrt{5.4}} \approx N(0, 1).$$

och därför blir

$$P(X \geq 59) = P\left(\frac{X - 54}{\sqrt{5.4}} \geq \frac{59 - 54}{\sqrt{5.4}}\right)$$

$$\approx P(Z \geq 2.15) = 1 - P(Z < 2.15) \hat{=} 1 - 0.9842$$

$$\hat{=} 0.016$$

↑
tabell sid 698 //

d) Vad är sann. att vi förkastar

påståendet ($X \leq 58$) om det är sant och
 p i själva verket är 0.95?

L: Vi söker $P(X \leq 58)$ med $X \sim \text{Bin}(60, 0.95)$

OBS: $n(1-p) = 60 \cdot 0.05 = 3 < 5$ så normalapprox

är ej lämplig.

$$P(X \leq 58) = 1 - P(X \geq 59) = 1 - P(X = 59) - P(X = 60)$$

$$= 1 - \binom{60}{59} p^{59} (1-p) - \binom{60}{60} p^{60} (1-p)^0 = 1 - 60 p^{59} (1-p) - p^{60}$$

$$\hat{=} 0.81 //$$

Eget tal (on kap. 5.4, forts tal 5.8 & 5.20)

Låt (X, Y) ha gemensam t.f.h.n

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{6640} (4x + 2y + 1) \quad \text{för} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$

Hitta regressionskurvan av X på Y

och " " " " Y " X .

L:

Med regressionskurvan av X på Y menas $E[X | Y=y]$ som t.f.h.n av y .
(alt $\mu_{X|Y}$)

I tal 5.20 beräknade vi

$$f_Y(y) = \frac{2y + 81}{166}$$

$$\text{s. a.} \quad f_{X|Y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{6640} (4x + 2y + 1)}{\frac{1}{166} (2y + 81)}$$

$$= \frac{1}{40} \cdot \frac{4x + 2y + 1}{2y + 81}, \quad \text{för} \quad \begin{matrix} 0 \leq x \leq 40 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix}$$

Därför blir

$$\begin{aligned} E[X | Y=y] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x) dx = \frac{1}{40(2y+81)} \int_0^{40} x(4x+2y+1) dx \\ &= \frac{1}{40(2y+81)} \int_0^{40} 4x^2 + 2xy + x dx = \frac{1}{40(2y+81)} \left[\frac{4x^3}{3} + x^2y + \frac{x^2}{2} \right]_0^{40} \end{aligned}$$

MVE 091

125 (4)

$$= \frac{1}{120(2y+81)} (256000 + 4800y + 2400)$$

$$= \frac{6400 + 120y + 60}{3(2y+81)}.$$

7.4 Låt X vara antalet förfrågningar ett datorsystem tar emot per timme.

Antag att $X \sim \text{Poi}(\lambda s)$. Följande data

observeras:

25	20	20	30	24
15	10	23	4	

a) Hitta en VVR-sättning för λs .

L: Vad händer? Vi har en Poisson-process



Intensiteten är # händelser / tidsenhet

(# förfråg. / timme). X anges i denna enhet men sägs vara $\text{Poi}(\lambda s)$ där s är vadå? Antagligen # timmar?

Då är enheten för X # förfrågningar (under tiden s).

Dom menar $X = \#$ förfrågningar systemet tar emot under s timmar.

Men då blir data meningslöst för de har inte sagt hur länge de mätt.

Låt oss anta att de har mätt under en timme.

a) Hitta en VVR skattning för λ .

1: Vi har att $\bar{X} \sim \text{Poi}(\lambda s)$ s.e. $E[\bar{X}] = \lambda s$

Momentmetoden: $\hat{\lambda}_s = \bar{X}$. Är den VVR?

$$E[\hat{\lambda}_s] = E[\bar{X}] = E[X] = \lambda s$$

så ja.

Om $s=1$ får vi att $\hat{\lambda}_1(x) = \hat{\lambda}(x) = \bar{x} = 19$

b) Hitta en VVR skattning av antalet förfrågningar som inkommer under 15 minuter.

2: Här är $\bar{X} \sim \text{Poi}(\lambda \cdot \frac{1}{4})$. Vi får att

$$\hat{\lambda}_{1/4} = \hat{\lambda} / 4 = \frac{19}{4} //$$

7.16: Låt $\underline{X}_1, \dots, \underline{X}_n$ vara ett stickprov från en binomialfördelning med parametrar n (antas vara ändlig) och p . Visa att MME för p är $\hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}$.

L: Enligt momentmetoden skall vi

- i) Hitta g s.a. $E[\underline{X}_i] = g(p)$
- ii) Lösa ut $\hat{p}$ ur sambandet $\bar{X} = g(\hat{p})$.

Här är $E[\underline{X}_i] = np$ s.a. vi får sambandet

$$\bar{X} = g(\hat{p}) = n\hat{p} \Rightarrow \hat{p} = \frac{\bar{X}}{n}.$$

7.34: Låt X = livslängden på ett batteri.

Vi antar att $X \sim \text{Exp}(\beta)$. Hitta en ML-skattning baserat på följande data

1.7	4.0	1.9	2.0	1.7
2.1	-	-	-	-
3.1	-	-	-	-
3.6	-	-	-	-

L: Vi börjar med att bestämma MLE:n.

Enligt tidigare föreläsning är $f_X(x) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} x \geq 0$

Likelihooden blir

$$L(\beta) = \prod_{k=1}^n f(x_k | \beta) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\beta} e^{-x_k/\beta} = \frac{1}{\beta^n} \exp\left(-\frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n x_k\right).$$

Vi skall hitta det värde på β som maximerar $L(\beta)$. Därför logaritmerar vi:

$$\begin{aligned} \ell(\beta) &= \log(L(\beta)) = \log\left(\frac{1}{\beta^n} \exp\left(-\frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n x_k\right)\right) \\ &= -n \log \beta - \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n x_k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \ell'(\beta) = -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=1}^n x_k$$

$$\ell''(\beta) = \frac{n}{\beta^2} - \frac{2}{\beta^3} \sum_{k=1}^n x_k$$

Villkoret $0 = \ell'(\beta)$ ger oss $0 = -\frac{n}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=1}^n x_k$

$$\Rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{k=1}^n x_k = n \Rightarrow \beta = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}.$$

Vidare så är

$$l''(\bar{x}) = \frac{n}{(\bar{x})^2} - \frac{2}{(\bar{x})^3} \cdot n \bar{x} = -\frac{n}{(\bar{x})^2} < 0$$

så vi har hittat ett maximum!

Vår MLE blir därför $\hat{\beta}(x) = \bar{x}$ och

skattningen blir $\hat{\beta}(x) = \bar{x} \approx 2.995 \approx 3. //$