

7.46: Låt X vara tiden det tar att genomföra en beräkning om algoritmen är skriven i programspråket A, och låt Y vara motsvarande tid om algoritmen är skriven i programspråket B. Antag att X är normalfördelad med väntvärde 10 sekunder och standardavvikelse 3 sekunder medan Y är normalfördelad med väntvärde 9 sekunder och standardavvikelse 4 sekunder,

a) Vad är fördelningen för s.v. $X - Y$?

L: $X \sim N(10, 9)$ och $Y \sim N(9, 16)$. Dessutom är $-Y \sim N(-9, 16)$. Vi antar att X, Y är oberoende så att enligt sats från F16

$$X + (-Y) \sim N(10 - 9, 9 + 16) = N(1, 25)$$

dvs $X - Y \sim N(1, 25)$.

b) Hitta sannolikheten att en given beräkning går fortare med A än med B.

L: Vi söker $P(X < Y)$.

Man skulle kunna använda att

$$P(X < Y) = \int \int_{x < y} f_{X,Y}(x,y) dy dx$$

$$= \int \int_{x < y} f_X(x) f_Y(y) dy dx = \dots$$

Detta blir en extremt tung beräkning
i detta fall.

I stället: $P(X < Y) = P(X - Y < 0)$

$$= P\left(\frac{X - Y - 1}{\sqrt{25}} < \frac{-1}{\sqrt{25}}\right) = P\left(Z < -\frac{1}{5}\right)$$

$$= P(Z < -0.2) \approx 0.4207$$

↑
tabell sid 697 //

8.2: Bla bla bla, data:

10.9 1.7 9.5 2.9 9.1 3.2

9.1 - -

⋮

a) Hitta "sample variance" för dessa data

L: Samplingsvariansen ges av

$$s^2(\bar{x}) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})^2$$

Med data blir detta

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 = \frac{1}{29} \sum_{k=1}^{30} (x_k - \bar{x})^2$$

Räkningar ger

$$\bar{x} \approx 8.62 \quad \text{och} \quad s^2(x) \approx 20.4 //$$

b) Antag att data kommer från en normalfördelning. Hitta ett 90% K.I. för variansen.

L: Vi använder referensvariabeln

$$R = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Vi har att

$$1-\alpha = \mathbb{P} \left(\chi^2_{1-\alpha/2} \leq \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{\alpha/2} \right)$$

$$= \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right)$$

Med $\alpha = 0.1$ har vi från tabell (sid 696)
med $n-1=29$ $\chi^2_{0.05} \approx 17.7$ och $\chi^2_{0.95} \approx 42.6$

$$\Rightarrow \underline{I}_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)S^2(x)}{\chi^2_{\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2(x)}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right] \approx \left[\frac{29 \cdot 20.4}{17.7}, \frac{29 \cdot 20.4}{42.6} \right]$$

$$\approx [33.5, 13.9] \quad ???$$

Vi har läst av tabellen fel!

$$\chi^2_{0.05} \approx 42.6 \quad \text{och} \quad \chi^2_{0.95} \approx 17.7 \quad \text{så}$$

$\underline{I}_{\sigma^2} \approx [13.9, 33.5]$, är ett 90% numeriskt
K.I. för σ^2 ,

c)

Hitta ett 90% K.I. för σ .

$$\underline{L:} \quad 1-\alpha = \mathbb{P} \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \right)$$

$$= \mathbb{P} \left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{I}_{\sigma} = [\sqrt{13.9}, \sqrt{33.5}] \approx [3.73, 5.79] //$$

d)

Använd skattningar av μ och σ för
att beräkna sann. att luminositeten
överskrider 18.

L: Vi antar $\underline{X} \sim \mathcal{N}(8.62, 20.4)$ och beräknar

$$\mathbb{P}(\underline{X} \geq 18) = \mathbb{P} \left(\frac{\underline{X} - 8.62}{\sqrt{20.41}} \geq \frac{18 - 8.62}{\sqrt{20.41}} \right) = \mathbb{P}(Z \geq 2.08)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 2.08) \approx 1 - 0.981 = 0.019 //$$

8.32: Utsläpps-standarden för dieselbilar är 0.6 g/mile. Man hoppas att en ny motordesign har reducerat utsläppen till under denna nivå.

a) Sätt upp lämpliga noll- och alternativhypoteser för att testa om den nya designen reducerar utsläppen i snitt.

2: Låt μ beteckna ^{den genomsnittliga} utsläppsmängden som den nya designen resulterar i.

Vi har då

$$H_0: \mu = 0.6$$

$$H_1: \mu < 0.6 //$$

b) Vad är de praktiska konsekvenserna av att göra ett typ I och ett typ II fel?

2: typ I fel: Förkasta H_0 om H_0 sann

typ II fel: Acceptera H_0 om H_1 sann

Konsekvens av typ I fel: Vi byter motordesign trots att den nya inte är bättre

Konsekvens av typ II fel: Vi behåller den äldre designen trots att den nya är bättre,

c) Man testade 64 motorer och man uppmätte ett medelvärde på utsläppen om $\bar{x} = 0.5 \text{ g/nl}$. Antag att $\sigma = 0.4$ och hitta ett p-värde för testet.

Bör H_0 förkastas? Vilken typ av fel riskerar du att göra?

L: Låt $X_k = \text{utsläpp för motor } k$

Fördelningen för X_k är inte känd, men vi vet att $E[X_k] = \mu$ och $\text{Var}(X_k) = \sigma^2 = 0.4^2$.

Enligt CLT så är

$$\bar{X} \approx N(E[\bar{X}], \text{Var}(\bar{X})) = N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \quad (\text{F14})$$

Under H_0 så är $\mu = 0.6$ och $\sigma = 0.4$ så att

$$\bar{X} \approx N(0.6, \frac{0.4^2}{64}) \Rightarrow T = \frac{\bar{X} - 0.6}{0.4/\sqrt{64}} \approx N(0, 1).$$

Från F18:

$$p\text{-värde} = P(T(\bar{X}) \leq T(x) \mid H_0)$$

$$\text{Här är } T(x) = \frac{\bar{x} - 0.6}{0.4/\sqrt{64}} = \frac{0.5 - 0.6}{0.4/8} = -8 \cdot \frac{0.1}{0.4} = -2$$

$$p\text{-värde} = P(T(\bar{X}) \leq -2) = P(Z \leq -2) \approx 0.0228.$$

Antagligen bör H_0 förkastas (ja om $\alpha = 0.05$)
(nej om $\alpha = 0.01$)

Vi riskerar då ett typ I fel. //

8.48: Bla bla bla data: ($n=30$)

1.8 3.7 - - -

⋮

där $\bar{x} = 3.97$ och $s = 1.89$

a) Testa $H_0: \mu = 1.3$

$H_1: \mu > 1.3$

på $\alpha = 0.01$ nivå.

2: Formuleringen anger ej från vilken fördelning data är dragna. Enligt sid 280 kan vi ändå anta att

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

då $n \geq 25$, "kräver egentligen normalförd"

p-värde = $P(T(\bar{X}) \geq T(x))$ där $T(\bar{X}) \sim t_{n-1}$

och $T(x) = \frac{\bar{x} - 1.3}{s/\sqrt{30}} \approx 7.74$, Tabell sid 688

$$P(T(\bar{X}) \geq 7.74) \leq P(T(\bar{X}) \geq 3.659) = 0.0005$$

så vi förkastar H_0 på $\alpha = 0.01$.

b) Testa $H_0: \sigma = 0.6$

$H_1: \sigma > 0.6$

på $\alpha = 0.01$.

L: Enl. sid 281 bör vi genomföra ett test med $T = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$

om data y är normalfördelad.

Vi antar därför att data är normalförd.

p-värde = $\mathbb{P}(T(\bar{X}) \geq T(x))$ där $T(\bar{X}) \sim \chi^2(22)$

och $T(x) = \frac{29 \cdot 1.89^2}{0.6} \approx 173$. Tabell sid 686

$$\mathbb{P}(T(\bar{X}) \geq 173) \leq \mathbb{P}(T(\bar{X}) \geq 52.3) = 0.005,$$

Vi förkastar H_0 på $\alpha = 0.01$ nivå.