

Tentamentsskrivning i **Matematisk Statistik MVE091**

Tid: den 28 oktober, 2022 em

Examinator och jour: Erik Broman, mob. 073 7320791,

Hjälpmedel: Typgodkänd miniräknare, 4 A4-sidor egenhändigt skrivna anteckningar (2 ark fram och bak eller 4 ark på en sida) samt utdelade tabeller. **OBS:** Då F-tabellen är för skrymmande anger man bara kvantiler (t.ex. $f_\alpha(\gamma_1, \gamma_2)$) i förekommande fall.

Tentamen består av 6 frågor om sammanlagt 50 poäng. Preliminära betygsgränser är satta till:

betyg "3": 20 till 29 poäng

betyg "4": 30 till 39 poäng

betyg "5": 40 eller fler poäng.

OBS! Alla lösningar skall vara väl redovisade, motiverade och fullständiga. Svar skall ges på enklast möjliga form. Talen är ej ordnade efter svårighetsgrad.

1. Berra har två lådor med strumpor. I den första lådan finns det 2 gröna, 2 gula och en blå strumpa. I den andra lådan finns det 3 blåa och 2 gula strumpor. Berra väljer först en låda slumpmässigt (dvs med samma sannolikhet) och väljer därefter två strumpor slumpmässigt ur den valda lådan.

- (a) Vad är sannolikheten att Berra får en gul och en blå strumpa? (4p)
- (b) Givet att Berra fick en gul och en blå strumpa, vad är sannolikheten att Berra valde låda nummer 1? (2p)

2. Låt X ha täthetsfunktion

$$f(x) = Ax^4 \text{ för } 0 \leq x \leq 1.$$

- (a) Bestäm A så att detta verkligen är en täthetsfunktion. (2p)
- (b) Beräkna väntevärdet och standardavvikelsen av X . (3p)
- (c) Beräkna $\mathbb{P}(0.7 \leq X \leq 0.9)$ (2p)

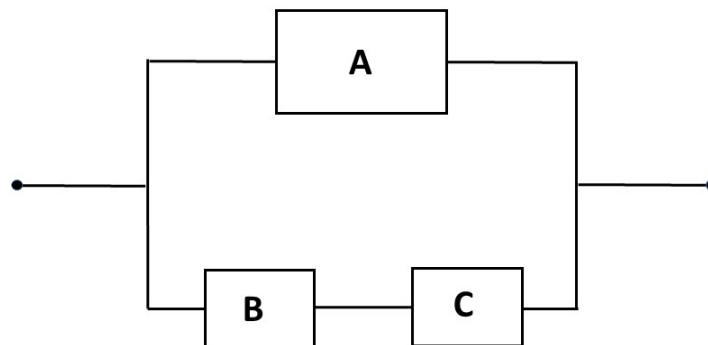
3. En flodhäst på ett zoo äter antingen 0, 1 eller 2 paket flodhästmat per dygn. Sannolikheten att den äter 0 paket är 0.01, sannolikheten att den äter 1 paket är 0.1 och sannolikheten att den äter 2 paket är 0.89. Vi antar att hur mycket flodhästen äter på olika dagar är oberoende av varandra.

- (a) Beräkna sannolikheten att flodhästen äter fler än 190 paket mat under 100 dygn. (4p)
- (b) Beräkna sannolikheten att flodhästen äter fler än 190 paket mat under 100 dygn *och* fler än 190 paket under de därpå följande 100 dygnen. (2p)

4. Låt (X, Y) vara två kontinuerliga slumpvariabler med gemensam täthetsfunktion

$$f_{XY}(x, y) = 6(x - y) \text{ för } 0 \leq y \leq 1 \text{ och } y \leq x \leq 1.$$

- Bestäm marginaltäthetsfunktionen för Y . (2p)
 - Bestäm den betingade täthetsfunktionen för X givet $Y = y$. (1p)
 - Beräkna $E[X|Y = y]$ för alla värden på y . (3p)
5. Betrakta ett elektriskt system enligt Figur 1. Systemet fungerar om antingen komponent A fungerar, eller om både B och C fungerar. Vi låter F_A vara händelsen att komponent A fungerar efter ett år och vi låter $p_A = \mathbb{P}(F_A)$ vara motsvarande sannolikhet. På liknande sätt definierar vi F_B, F_C och p_B, p_C .



Figur 1: Ett elektriskt system.

- Under antagandet att alla händelser är oberoende av varandra, vad är sannolikheten (uttryckt i p_A, p_B och p_C) att systemet fungerar efter ett år? (3p)
 - Vad blir sannolikheten i (a) om vi vet att händelsen F_A^c inträffar (dvs att komponent A ej fungerar efter ett år)? (3p)
6. Låt $X_1, X_2, \dots, X_n$ vara i.i.d. (dvs oberoende och likafördelade) där fördelningen är $\text{Gamma}(\alpha, \beta)$.
- Bestäm likelihooden för $X_1, \dots, X_n$. (1p)
 - Bestäm log-likelihooden för $X_1, \dots, X_n$ och expandera detta uttryck (dvs skriv inte bara log av svaret i (a)). (2p)
 - Antag att $\alpha = 3$. Hitta maximum likelihood skattaren (MLE:n) för β . Använd att $\Gamma(3) = 2$. (4p)

7. SkumRask tillverkar isolerskum som skall användas i byggen. De hävdar att halten asbest i deras isolerskum inte är mer än 4%. Konsumentverket misstänker att de ljugar och köper därför in 30 varuprover med isolerskum från SkumRask. Konsumentverket låter därefter testa de 30 varuproverna och får att samplingsmedelvärdet blir $\bar{x} = 5.2$ med samplingsvariansen $s^2(x) = 2.2$. Konsumentverket antar att data kommer från en normalfördelning.
- (a) Sätt upp ett lämpligt hypotestest för att testa Konsumentverkets misstankar. (2p)
 - (b) Om man väljer signifikansnivån $\alpha = 0.05$, vad blir då motsvarande förkastningsregion (rejection region, RR)? (3p)
 - (c) Utför testet i (a) på signifikansnivån $\alpha = 0.05$. Vilken slutsats drar du? Vilken typ av fel riskerar du att göra? (2p)
8. Ett företag skall välja en underleverentör som skall leverera en speciell komponent. Det är viktigt att komponenterna inte är defekta och man köper därför in två provserier från vardera underleverentör. Efter att man testat alla inköpta komponenter fick man följande resultat.

Underleverentör nr:	1	2
Antal inköpta komponenter:	800	900
Varav defekta:	32	41

- (a) Skatta proportionerna defekta komponenter från de två underleverentörerna. (1p)
- (b) Ange ett 95% konfidensintervall för skillnaden mellan proportionerna. (4p)