TMA 660 Linjär algebra & geometri 25/8 21 lösningar (1)

1 $\det A = \begin{vmatrix} 2c-1 & c+1 & 3+c \\ c & 2 & c \\ 1-c & 1-c & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-1 & c-1 & 3 \\ c & 2 & c \\ 1-c & 1-c & c-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c-1 & 0 & 3 \\ c & 2-c & c \\ 1-c & 0 & c-4 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} c-1 & 0 & 3 \\ c & 2-c & c \\ 0 & 0 & c-1 \end{vmatrix} = (c-1)^2(c-2)$$

$\det A = 0 \Leftrightarrow c=1$ eller $c=2$

Alltså Om $c\neq 1, c\neq 2 \Rightarrow A$ inverterbar $\Rightarrow$ rank $A=3$

$\underline{c=1}$: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ radvektorer ej parallella $\Rightarrow$ rang ≥ 2
rad 2 = rad 1 + rad 3 $\Rightarrow$ rang = 2

$\underline{c=2}$ $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ kolonnvektorer ej parallella $\Rightarrow$ rang ≥ 2
kolonn 1 = kolonn 2 $\Rightarrow$ rang = 2

$\underline{\text{Slutsats}}$: $\underline{\underline{\text{rang } A = 2 \text{ då } c=1,2 \quad \text{rang } A=3 \text{ annars}}}$

2 a) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{u}-\mathbf{v})\cdot\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}$ ortogonal mot
$\mathbf{u}-\mathbf{v} = (1,2,3)-(3,2,1) = (-2,0,2) \Leftrightarrow \mathbf{x} \in$ planet med normal-
vektor $(1,0,-1) \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0$

b) $\mathbf{u}\times\mathbf{x} = \mathbf{v}\times\mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{u}-\mathbf{v})\times\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u}-\mathbf{v}$ & $\mathbf{x}$ linj. beroende
$\Leftrightarrow \mathbf{x}$ parallell m $(1,0,-1) \Leftrightarrow \mathbf{x} = t(1,0,-1)$ $t\in\mathbb{R}$

c) $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow$ parallellepipeden som spänns av $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}$
har volym $0 \Leftrightarrow \mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v}$ linjärt beroende $\Rightarrow$ eftersom
$\mathbf{u},\mathbf{v}$ ej parallella så $\mathbf{x}$ linjärkomb av $\mathbf{u},\mathbf{v}$, dvs
$\mathbf{x}$ i planet som spänns av $\mathbf{u}$ & $\mathbf{v}$ $\Rightarrow$
$\mathbf{x} = s(1,2,3)+t(3,2,1)$, $s,t\in\mathbb{R}$

3) $\ell_1 = (1,2,3) + s\underbrace{(4,5,6)}_{=:\mathbf{v}_1}$ $s\in\mathbb{R}$, $\ell_2 = (0,1,2) + t\underbrace{(14,8,16)}_{=:\mathbf{v}_2}$, $t\in\mathbb{R}$

Obs ℓ_1 & ℓ_2 ej parallella ty $\mathbf{v}_1$ & $\mathbf{v}_2$ ej parallella
$\Rightarrow \exists$ plan som innehåller ℓ_1 & ℓ_2 omm ℓ_1 & ℓ_2 skär varandra

TMA660 28/8 21 lösn

2

Undersök om skär:

$$\begin{cases} 1+4s = 4t \\ 2+5s = 1+8t \\ 3+6s = 2+16t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t-4s=1 \\ 8t-5s=1 \\ 16t-6s=1 \end{cases} \begin{matrix} (-2) & (-4) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4t-4s=1 \\ \quad 3s=-1 \\ \quad 10s=-3 \end{cases} \Big\} \text{ Lösn. saknas}$$

ekv.system ej lösbart $\Rightarrow$ l_1 & l_2 skär ej $\Rightarrow$

$\nexists$ plan som innehåller l_1 & l_2.

---

4) $(1-3i)z^3-(12+4i)z^2+(5+25i)z=0 \Leftrightarrow$

$z\big(\underbrace{(1-3i)z^2-(12+4i)z+(5+25i)}_{=:\,p(z)}\big)=0 \Leftrightarrow z=0$ eller $p(z)=0$

Lös $p(z)=0$

- Förenkla. Först dela med $1-3i$:

$$p(z)=0 \Leftrightarrow 0=z^2-\frac{12+4i}{1-3i}z+\frac{5+25i}{1-3i} \overset{\text{Räkning}}{=} z^2-4iz-7+4i$$

- Kvadratkomplettera:

$$p(z)=0 \Leftrightarrow (z-2i)^2-(2i)^2-7+4i=0 \Leftrightarrow (z-2i)^2=3-4i \quad (*)$$

- Sätt $\tilde z = z-2i$

Ansätt $\tilde z = x+iy \Rightarrow \tilde z^2 = x^2-y^2+2ixy \quad |\tilde z|^2=x^2+y^2$

Då $(*) \Leftrightarrow \tilde z^2 = 3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 & (\mathrm{Re}\,\tilde z^2=3) \quad (\mathrm{I}) \\ 2xy=-4 & (\mathrm{Im}\,\tilde z^2=-4) \quad (\mathrm{II}) \end{cases}$

Dessutom $x^2+y^2=5 \quad (|\tilde z|^2=|3-4i|) \quad (\mathrm{III})$

$(\mathrm{I})+(\mathrm{III})$: $2x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2$

(II): $x=2 \Rightarrow y=-1$ (löser också (I))

$\quad\; x=-2 \Rightarrow y=1$ (— " —)

Alltså $\tilde z = 2-i$ eller $\tilde z=-2+i$

$\Rightarrow \quad z=2+i$ eller $z=-2+3i$

Slutsats: $p(z)=0$ har lösn. $z=0,\ z=2+i,\ z=-2+3i$

5 a) SANT ty $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj} A$ om $\det A\neq 0$

b) FALSKT ty t.ex $u=e_1,\ v=e_2\ \ w=e_2$ Då $u\times w=e_1\times e_2=e_3$

c) FALSKT ty $f(0)\neq 0$

d) SANT Låt $P=(1,3)\in l_1\ \ Q=(3,1)\in l_2$. Då $\overrightarrow{PQ}=(2,-2)\perp l_1, l_2$ och $|\overrightarrow{PQ}|=2\sqrt{2}$

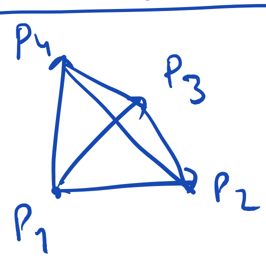
e) SANT ty $A^TA=[1\ 2\ 3]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=14\quad A^Tb=[1\ 2\ 3]\begin{bmatrix}7\\3\\5\end{bmatrix}=28$

Alltså $A^TA\,x=14\cdot 2=28=A^Tb$

f) SANT ty $|u\cdot v|=|u||v||\cos\theta|\leq |u||v|$

---

6 a)



Minns $\text{vol}(T)=\frac{1}{6}\left|\left|\overrightarrow{P_1P_2}\ \overrightarrow{P_1P_3}\ \overrightarrow{P_1P_4}\right|\right|=$

$$\left[\begin{aligned}&\text{Obs } \overrightarrow{P_1P_2}=(1,0,0)-(-1,-1,-1)=(2,1,1)\\&\overrightarrow{P_1P_3}=\ldots=(1,2,1)\\&\overrightarrow{P_1P_4}=\ldots=(1,1,2)\end{aligned}\right]$$

$$\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|8+1+1-2-2-2\right|=\frac{1}{6}4=\frac{2}{3}$$

Slutsats: volymen av T är 2/3

b) Låt A vara avbildningsmatris.

Då
$$A\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}\\ P_1\ \ P_2\ \ P_3\end{array}=\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\ P_2\ \ P_3\ \ P_4\end{array}$$

Alltså A är inversen till $\begin{bmatrix}-1&1&0\\-1&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}$

Räkna:
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1&1&0&1&0&0\\-1&0&1&0&1&0\\-1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&1&0&-1\\0&0&1&0&1&-1\end{array}\right]$$

Alltså är avbildn.matrisen $A=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}$

TMA660 23/8 21 lösn

c) $f(\mathbf{x})=\mathbf{x} \Leftrightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{x} \Leftrightarrow (A-I)\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$$A-I=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&-2\end{bmatrix}$$

Obs $|A-I| = \begin{vmatrix}-1&0&-1\\1&-1&-1\\0&1&-2\end{vmatrix} = -2-1-1=-4$

Obs $\det(A-I)\neq 0 \Leftrightarrow (A-I)\mathbf{x}$ endast den triv lösn $\mathbf{x}=\mathbf{0}$

Slutsats: endast $\mathbf{0}$ avbildas på sig själv.

d) Vet redan att $f(P_1)=P_2$, $f(P_2)=P_3$, $f(P_3)=P_4$

$$f(P_4)=\begin{bmatrix}0&0&-1\\1&0&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}=P_1$$

Alltså $f(T)=T$

Spec $\text{Vol}(f(T))=\text{Vol}(T)=2/3$

---

7) Se Spår Kapitel 2 LS

8) Se Spår kap 8, Persson-Böiers Appendix A