

MVE670 Linjär algebra F/TM

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1-c & 2-c & 4-2c \\ c & 2c & 3c \\ c & c & c \end{bmatrix}$.

Bestäm för varje värde på $c \in \mathbb{R}$ nollrummet och kolonnrummet till A . (6 p)

2. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ och $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Avgör om det finns en matris B så att

(a) $ABC = A$

(b) $ABC = B$

(c) $ABC = C$.

Om så är fallet ange en sådan matris B . (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Antag att λ är ett egetvärde till A och att μ är ett egetvärde till B . Då är $\lambda + \mu$ ett egetvärde till $A + B$.

(b) Polynomet $p(z) = 2z^6 - 3z^5 + z - 11$ har exakt fem reella nollställen.

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ och låt $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Då har $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$ en entydigt bestämd lösning.

(d) Låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell_f: t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, låt $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell_g: t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt A_f och A_g vara motsvarande avbildningsmatriser. Då är rangen av A_f lika med rangen av A_g .

(e) Mängden av alla polynom av grad 3 är ett vektorrum.

(f) Antag att A är en inverterbar matris. Då är spåret av A nollskilt.

4. Betrakta punkterna $P_1 = (1, 0, 2)$, $P_2 = (2, 0, 3)$, $P_3 = (3, 3, 0)$ och $P_4 = (4, 4, 4)$. Avgör om det finns ett plan som innehåller P_1 , P_2 , P_3 och P_4 . Bestäm i så fall planets ekvation. (6 p)

5. Låt $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $(x, y) \mapsto x + yi$, låt $h: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ vara avbildningen $z \mapsto z + \bar{z}$ och låt $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara avbildningen $f = g^{-1} \circ h \circ g$. Visa att f är linjär och bestäm avbildningsmatrisen till f . Bestäm alla egetvärden och egenvektorer till f . (6 p)

6. Låt A vara en $(n \times n)$ -matris, $n \geq 2$. Visa att (6 p)

$$\det(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-1}.$$

7. (a) Definiera *vektorrum*.

(b) Låt V vara ett vektorrum. Definiera *skalärprodukt på V* . (8 p)

8. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icke trivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth