

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Avgör om $\mathbf{b}$ ligger i nollrummet till A , om $\mathbf{b}$ ligger i kolonnrummet till A , samt om $\mathbf{b}$ är en egenvektor till A . (6 p)

2. Låt $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara moturs rotation runt z -axeln med $\pi/2$ radianer och låt A vara f s avbildningsmatris. Betrakta det karakteristiska polynomet för A som ett komplext polynom och skriv det på formen

$$c(z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n),$$

där $c, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ är komplexa tal. Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till A .

(6 p)

3. Bestäm avståndet mellan linjerna $\ell_1 : (3, 2, 0) + s(2, 0, -3), s \in \mathbb{R}$, och $\ell_2 : (-9, 8, -11) + t(-5, 3, -7), t \in \mathbb{R}$. (7 p)

4. Låt A vara $(n \times n)$ -matrisen med matriselement $a_{ij} = \begin{cases} a & \text{om } i = j \\ b & \text{om } i \neq j \end{cases}$.

Beräkna determinanten av A för

(a) $n = 3$

(b) $n = 5$

(c) allmänt n .

(6 p)

5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Mängden av alla polynom av grad högst 3 är ett vektorrum.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ är diagonaliserbar.

(c) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, låt $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$, och låt A_f och A_g vara motsvarande avbildningsmatriser. Då är nolldimensionen av A_f lika med nolldimensionen av A_g .

(d) Antag att A är en $(m \times n)$ -matris. Då är $\text{rang}(A) + \text{nolldim}(A) = m$.

(e) Låt $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ och $\mathbf{x}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Då gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet (\mathbf{w} \times \mathbf{x}) = (\mathbf{x} \times \mathbf{w}) \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{u}).$$

(f) Antag att $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_3$ spänner upp $\mathbb{R}^3$. Då är $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ och $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ linjärt oberoende.

6. En matris sägs vara skevsymmetrisk om $A^T = -A$. Antag att A är en skevsymmetrisk $(n \times n)$ -matris.

(a) Visa att om A är inverterbar så är A^{-1} skevsymmetrisk.

(b) Visa att om n är udda så är A ej inverterbar. (6 p)

7. Betrakta $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (7 p)

8. Antag att A är en symmetrisk matris av typ $(n \times n)$. Vidare antag att $\mathbf{s}$ är en egenvektor till A med egenvärde λ och att $\mathbf{s}'$ är en egenvektor till A med egenvärde λ' och att $\lambda \neq \lambda'$. Visa att $\mathbf{s}$ är ortogonal mot $\mathbf{s}'$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth