

TMA660 Linjär algebra och geometri F/TM

Motivera noga alla svar på uppgifterna! Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Betrakta vektorerna $\mathbf{v}_1 = (4, -4, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 2, -1, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (2, -3, 0, -1)$ och $\mathbf{v}_4 = (5, -4, -1, 1)$ i $\mathbb{R}^4$.
 - (a) Avgör om $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$ är linjärt beroende.
 - (b) Är $\mathbf{v}_1$ en linjärkombination av $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ och $\mathbf{v}_4$? (7 p)
2. Betrakta punkterna $P_1 = (0, 2, -1)$, $P_2 = (3, 5, 2)$, $P_3 = (4, 1, 0)$ och $P_4 = (5, 2, 1)$ i rummet. Avgör om det finns ett plan som innehåller P_1 , P_2 , P_3 och P_4 . Bestäm i så fall planets ekvation. (6 p)
3. Låt $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara parametriseringen av linjen $\ell : t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, d v s avbildningen $f : t \mapsto t(1, 2)$, och låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara parametriseringen av planet $\Pi : s(-3, 4, -5) + t(6, -7, 8), s, t \in \mathbb{R}$, d v s avbildningen $g : (s, t) \mapsto s(-3, 4, -5) + t(6, -7, 8)$.
 - (a) Bestäm avbildningsmatrisen för f respektive g .
 - (b) Bestäm avbildningsmatrisen för $g \circ f$.
 - (c) Bestäm värdemängden för $g \circ f$. (6 p)
4. Låt $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
 - (a) Bestäm A^7 .
 - (b) Bestäm A^{17} . (6 p)
5. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Utelämnat svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)
 - (a) Determinanten av $A = \begin{bmatrix} c & c & a & a \\ a & b & c & b \\ b & b & b & b \\ a & a & c & c \end{bmatrix}$ är $a^4 + 3a^3b - 2abc^2 + 4b^2c^2$.
 - (b) i är ett nollställe till $p(z) = z^5 - z^4 - i + 1$ med multiplicitet 3.
 - (c) Låt $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 2)$. Då gäller att $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \bullet \mathbf{w} = \mathbf{u} \bullet (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.
 - (d) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, och låt A vara dess avbildningsmatris. Då har A rang 1.
 - (e) Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Då har A en entydigt bestämd högerinvers.
 - (f) Avståndet mellan planen $\Pi_1 = \{3x + 4y + 5z = 9\}$ och $\Pi_2 = \{2x + 3y + 4z = 8\}$ är 1.

6. Låt P vara den fyrhörning i planet vars hörn är $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(6, 8)$ och $(7, 3)$.
- (a) Bestäm arean av P .
- (b) Låt ℓ vara linjen $\ell : t(1, -2), t \in \mathbb{R}$, och låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på ℓ . Beskriv bilden av P under f , det vill säga mängden $f(P) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ för något } \mathbf{x} \in P\}$. (7 p)
7. Låt A vara en matris av typ $m \times n$. Visa att det finns en entydigt bestämd matris B av typ $m \times n$ sådan att $A + B = \mathbf{0}$. (6 p)
8. Låt $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ vara två linjärt oberoende vektorer i $\mathbb{R}^3$. Visa att om $\mathbf{v}$ är en vektor i $\mathbb{R}^3$ så finns en entydig uppdelning $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}^\perp$, där $\mathbf{v}'$ är en linjärkombination av $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ och $\mathbf{v}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth