

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. Låt $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ och $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

- (a) Beräkna $\det A$ och $\det B$.
- (b) Bestäm rang A och rang B .
- (c) Avgör om A respektive B har högerinvers. (7 p)

2. Skriv

$$p(z) = (2 - i)z^3 - (6 + 2i)z^2 + (4 - 7i)z$$

på formen $p(z) = c(z - a_1) \cdots (z - a_n)$ där $a_1, \dots, a_n, c \in \mathbb{C}$. (6 p)

3. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (7 p)

- (a) Mängden av alla polynom av grad minst 5 är ett vektorrum.
- (b) Låt T vara tetraedern med hörn i $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 5)$, $(0, 1, 0)$ och $(3, 7, 5)$. Då är volymen av T $21/4$.
- (c) Betrakta linjerna $\ell_1 = (1, 1) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$, $\ell_2 = (2, 2) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$ och $\ell_3 = (3, 3) + t(1, 2), t \in \mathbb{R}$. Då är avståndet mellan ℓ_1 och ℓ_2 lika stort som avståndet mellan ℓ_2 och ℓ_3 .

(d) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Då är $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T A \mathbf{y}$ en skalärprodukt på $\mathbb{R}^n$.

(e) Låt $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$ vara vektorer i rummet. Då gäller att

$$((\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

(f) Antag att A är en $(n \times n)$ -matris sådan att $\det A \neq 0$. Då är A diagonaliserbar.

(g) Låt $C(\mathbb{R})$ vara mängden av kontinuerliga funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Då är $C(\mathbb{R})$ ett oändligdimensionellt vektorrum.

4. Avgör om det finns en linje genom punkten $P = (1, 2, 7)$ som skär linjen $\ell : (1, 2, -2) + t(3, -2, -1), t \in \mathbb{R}$, och som dessutom innehåller punkten $Q = (4, 0, 5)$. Bestäm i så fall linjens ekvation. (6 p)

5. Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara ortogonal projektion på linjen $\ell : t(2, 1), t \in \mathbb{R}$, och låt A vara avbildningsmatrisen till f . Vidare låt $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation med $\pi/3$ radianer och låt B vara avbildningsmatrisen till g . Låt

$$C = A^5 B A^4 B A^3 B A^2 B A.$$

Bestäm alla egenvärden och egenvektorer till C . (6 p)

6. Antag att $A = (a_{ij})$ är en $(n \times n)$ -matris sådan att alla matriselement a_{ij} är heltal och antag att $\det A = 1$. Låt $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ vara en vektor sådan att $b_1, \dots, b_n$ är heltal. Låt $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ vara en lösning till $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Visa att $x_1, \dots, x_n$ är heltal. (6 p)

7. Låt $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Antag att $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ spänner upp $\mathbb{R}^n$ och är linjärt oberoende. Visa att det för varje $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^n$ finns entydigt bestämda reella tal $u_1, \dots, u_n$ så att

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{v}_1 + \dots + u_n \mathbf{v}_n.$$

(6 p)

8. Låt A vara en $m \times n$ -matris, där $m \geq n$. Visa att en lösning till normalekvationen

$$A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b} \tag{1}$$

minimerar $|A\mathbf{x} - \mathbf{b}|$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth