

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Beräkna $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 26 & 11 & 0 \\ 4 & 22 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

(b) Lös ekvationssystemet $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 26x_2 + 11x_3 = 0 \\ 4x_1 + 22x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$.

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 26 & 11 & 0 \\ 4 & 22 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Avgör om vektorn $(1, 2, 3, 4)$ ligger i kolonnrummet till A .
(6 p)

2. Lös ekvationen $p(z) = 0$ där

$$p(z) = z^3 + z^2 - 4z - 24.$$

Tips: $p(z)$ har (åtminstone) ett nollställe på formen $a(1+i)$, där $a \in \mathbb{R}$. (6 p)

3. Bestäm avståndet mellan planet $\Pi = \{4x + y - 8z = 5\}$ och linjen $\ell : (7, 2, -7) + t(3, 4, 1)$, $t \in \mathbb{R}$. (6 p)

4. Låt $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ beteckna mängden av reella (2×2) -matriser. Låt $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ vara avbildningen $X \mapsto \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} X$. Visa att f är linjär och bestäm avbildningsmatrisen A för f med avseende på basen $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Beräkna determinanten av A . (6 p)

5. Antag att A är en (2×2) -matris och att 2 och 3 är egenvärden till A . Låt $B = 2A^3 - 5A^2 - 3A$. Avgör om B är inverterbar. (6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Låt $C[-\pi, \pi]$ vara rummet av kontinuerliga funktioner från $[-\pi, \pi]$ till $\mathbb{R}$ och låt

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \sin(x) dx.$$

Då är $\langle f, g \rangle$ en skalärprodukt på $C[-\pi, \pi]$.

(b) Antag att $\mathbf{x}$ är en egenvektor till A . Då är $\mathbf{x}$ en egenvektor till A^T .

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Då är A diagonaliserbar.

(d) Linjen $\ell : t(1, 1, 1), t \in \mathbb{R}$, är parallell med planet $\Pi = \{x + y + z = 0\}$.

(e) Antag att A är en $(n \times n)$ -matris sådan att $\text{spår} A = 0$. Då är A inte inverterbar.

(f) Låt V vara rummet av polynom av grad högst 5. Då är $(x - 1)$, $(x - 1)(x - 2)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$, $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ linjärt oberoende i V .

7. (a) Definiera *vektorrum*.

(b) Låt V vara ett vektorrum. Definiera *skalärprodukt på V* . (8 p)

8. Låt $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Visa att det för varje vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ finns en entydigt bestämd uppdelning

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}^\perp,$$

där $\mathbf{u}'$ är parallell med $\mathbf{v}$ och $\mathbf{u}^\perp$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$. (6 p)

Lycka till!
Elizabeth