

MVE 670 3/1 22

2) Frys. Polynomdivision:

Anta $p(z) = (z^2 + 4z + 8)(z - 3)$

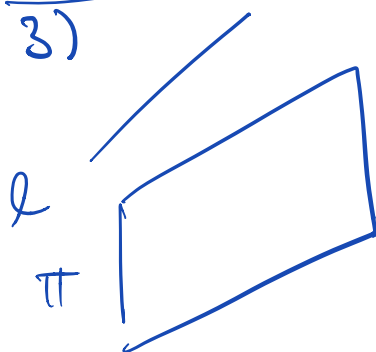
Anta $p(z) = 0$ har l sning.

$z = -2 - 2i, z = -2 + 2i, z = 3$

$$\begin{array}{r} z-3 \\ z^3+z^2-4z-24 \overline{) z^3+4z+8} \\ \underline{-(z^3+4z^2+8z)} \\ -3z^2-12z-24 \\ \underline{-(-3z^2-12z-24)} \\ 0 \end{array}$$

(2)

3)



Obs $n = (4, 1, -8)$ normalvektor
till π

$v = (3, 4, 1)$ r ktningsvektor till l .

$n \cdot v = (4, 1, -8) \cdot (3, 4, 1) = 12 + 4 - 8 = 8 \neq 0$

Anta n  r ortogonal mot v

$\Rightarrow l$ sk r $\pi \Rightarrow$ Avst ndet mellan l & π  r 0

4) L t $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. D   r $f(X) = BX$.

Fr n r knereglerna f r matriser f lj r att

$f(\lambda X + \lambda' X') = B(\lambda X + \lambda' X') = \lambda BX + \lambda' BX' = \lambda f(X) + \lambda' f(X')$

Anta  r f linj r.

Avbildningsmatrisen m a p basen E_1, E_2, E_3, E_4  r

av $A = \begin{bmatrix} | & & | \\ f(E_1) & \dots & f(E_4) \\ | & & | \end{bmatrix}$ d r $f(E_j)$  r koordinaterna i basen $E_1, \dots, E_4$

$f(E_1) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = aE_1 + cE_3$

$f(E_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} = aE_2 + cE_4$

$f(E_3) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} = bE_1 + dE_3$

MVE 670 3/1 22

③

$$f(E_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = bE_2 + dE_4$$

Alltså avbildningsmatrisen $A = \begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{whr.} \\ \text{kolonn 1} \end{matrix} a \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{matrix} \text{whr. rad 2} \\ c \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} = \begin{matrix} \text{whr. rad 1} \\ c \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{vmatrix} + \begin{matrix} \text{whr. kolonn 1} \\ a \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

$$ad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + c(-b) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (ad-bc) \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{\underline{(ad-bc)^2}} \\ = (\det B)^2$$

5) Lemma Om $B(n \times n)$ har egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. (*)
 Då B inverterbar $\Leftrightarrow \lambda_i \neq 0 \forall i$.

Låt $p(t) = 2t^3 - 5t^2 - 3t$

Obs om $Ax = \lambda x$ så är $Bx = (2A^3 - 5A^2 - 3A)x =$

$$2A^3x - 5A^2x - 3Ax = 2\lambda^3x - 5\lambda^2x - 3\lambda x = p(\lambda)x$$

Alltså om λ egenvärde till A , så är $p(\lambda)$ egenvärde till B

2 egenvärde till $A \Rightarrow p(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 16 - 20 - 6 = \underline{\underline{-10}}$
 egenvärde till B

3 egenvärde till $A \Rightarrow p(3) = 2 \cdot 3^3 - 5 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = (6 - 5 \cdot 1) \cdot 9 = \underline{\underline{0}}$
 egenvärde till B

Alltså B (2×2) har egenvärden -10 & 0

(*) ovan $\Rightarrow B$ ej inverterbar

TMA 3/1 22

④

- 6 a) FALSKT Låt $f=1$ då $\langle f, f \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = 0$
 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ej positivt definit
- b) FALSKT Tag α . $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Då $Av = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
 $A^T v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Alltså v egenv. till A men ej till A^T .
- c) SANT A är $\neq 0$ m diagonal.
- d) FALSKT $(1,1,1)$ normalvektor till $\Pi \Rightarrow l \perp \Pi$
- e) FALSKT Tag α $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Då $\text{spår } A = 0$ men A mbar
- f) SANT t.g. x_1, x_2, x_3, x_4 linjärt beroende
-

7 a) Se [H4] Definition 1.1

b) Se [H4] Definition 2.1

8 Se material på hemsidan om ortogonal projektion,
+ kap 4 i Sparr
