

MVE670 Linjär algebra F1/TM1

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt. **Motivera noga alla svar på uppgifterna!** Om en uppgift tar tid, fastna inte utan gå vidare med nästa.

Betygsgränser: 3: 20 p, 4: 30 p, 5: 40 (max 50 p).

Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

1. (a) Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 3 \end{cases}.$$

(b) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Bestäm kolonnrummet och nollrummet till A samt rangen och nolldimensionen av A .
(c) Avgör om A har en vänsterinvers.
(d) Avgör om A har en högerinvers. (7 p)
2. Skriv
$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 14z^2 - 20z + 25$$
 på formen $p(z) = c(z - a_1)(z - a_2) \cdots (z - a_n)$ där $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.
Ledtråd: Ett nollställe till $p(z)$ är $1 - 2i$. (6 p)
3. (a) Visa att $V = \{\text{diagonala } (n \times n)\text{-matriser}\}$ är ett vektorrum. **Tips:** Du får använda att mängden av alla $(n \times n)$ -matriser är ett vektorrum.
(b) Visa att $\langle A, B \rangle = \text{spår}(AB)$ är en skalärprodukt på V . (6 p)
4. Låt $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara spegling i planet $\Pi = \{x + 2y + 3z = 0\}$ och låt A vara avbildningsmatrisen till f . Visa att A är symmetrisk. (6 p)
5. Låt P_1, P_2, P_3 vara punkter i rummet och låt T vara triangeln med hörn i P_1, P_2, P_3 . Låt f vara ortogonal projektion på ett plan. Visa att arean av T är större än eller lika med arean av $f(T)$. (6 p)

6. Avgör om nedanstående påståenden är sanna eller falska. Det räcker med svar. Rätt svar på en deluppgift ger 1 poäng. Fel svar på en deluppgift ger -1 poäng. Uteblivet svar ger 0 poäng. Den totala poängen är dock ≥ 0 . (6 p)

(a) Låt $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara moturs rotation med $\pi/3$ radianer. Då är 0 ett egenvärde till f .

(b) Enhetsmatrisen är diagonaliserbar.

(c) Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Då har A rang 2.

(d) Linjen $\ell : (1, 1, 1) + t(1, 0, -1), t \in \mathbb{R}$, är parallell med planet $\Pi = \{x + y + z = 0\}$.

(e) Låt V vara rummet av polynom av högst grad 5 och låt $D : V \rightarrow V$ vara avbildningen $D(p(x)) = p'(x)$. Då är D en bijektiv linjär avbildning.

(f) Låt $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{w}$ vara vektorer i rummet. Då gäller att

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}.$$

7. Visa att ekvationen

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_s \mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

har en icke trivial lösning (d v s en annan lösning än den triviala lösningen $\lambda_1 = \cdots = \lambda_s = 0$) om och endast om någon av vektorerna $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ är en linjärkombination av de andra.

(6 p)

8. Låt A vara en $n \times n$ -matris.

(a) Definiera determinanten av A .

(b) Antag att A har egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Visa att $\det A = \lambda_1 \cdots \lambda_n$. (7 p)

Lycka till!
Elizabeth