TMV170 / MMGD30 MATEMATISK ANALYS VT22
LÖSTA EXEMPEL: ODE AV FÖRSTA ORDNINGEN

I dessa anteckningar kollar vi på några exempel gällande ordininära differentialekvationer av första ordningen.

Exempel 1.1. Bestäm den lösning till $y(x)y'(x) = -4x$ som uppfyller att $y(0) = -1$.

Lösning: Denna ekvationen är separabel (den är redan separerad). Men $g(y) = y$ och $f(x) = -4x$ så har ekvationen $g(y(x))y'(x) = f(x)$.

En primitiv till $g(y) = y$ ges av $G(y) = y^2/2$ och en primitiv till $f(x) = -4x$ ges av $F(x) = -2x^2$. Så vi kan skriva ekvationen som

$$(y(x)^2/2)' = -4x.$$

Om vi integrerar (tar primitiv) bägge sidor finner vi att

$$\int (y(x)^2/2)'\,dx = \int (-4x)\,dx \quad \Longrightarrow \quad y(x)^2/2 = -2x^2+C \quad \Longrightarrow \quad y(x)^2 = -4x^2+C.$$

Vi ser att antingen $y(x) = -\sqrt{C-4x^2}$ eller $y(x) = \sqrt{C-4x^2}$ är lösningar (där de är definierade). Vi söker den lösning som uppfyller att $y(0) = -1$ så det måste vara den negativa roten vi söker och vidare får vi att

$$-1 = y(0) = -\sqrt{C - 4\cdot 0^2} = -\sqrt{C}$$

så vi söker lösningen med $C = 1$. Vi finner att lösningen är $y(x) = -\sqrt{1-4x^2}$ som är en giltig lösning på intervallet $(-1/2, 1/2)$.

Exempel 1.2. Hitta den lösningen till differentialekvationen

$$(1+x^2)y'(x) + 1 + y(x)^2 = 0$$

som uppfyller att $y(1) = 0$.

Lösning: Vi kan skriva om ekvationen som följer

$$(1+x^2)y'(x)+1+y(x)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; (1+x^2)y'(x) = -(1+y(x)^2) \;\Leftrightarrow\; \frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

där vi i sista steget använde att $1+x^2, 1+y(x)^2$ båda är skilda från noll (de är inte mindre än 1). Vi har således visat att differentialekvationen är separabel (genom att separera den).

Med $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ och $f(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ har vi ekvationen på formen $g(y(x))y'(x) = f(x)$. g och f har primitiva $G(y) = \arctan(y)$, $F(x) = -\arctan(x)$. Så vi har att genom att integrera bägge sidor av ekvationen

$$\begin{aligned}\int g(y(x))y'(x)dx = \int f(x)dx \quad &\implies \quad \arctan(y(x)) = -\arctan(x) + C \\ &\implies \quad y(x) = \tan(-\arctan(x) + C)\,.\end{aligned}$$

Då $y(1) = 0$ får vi att C ska väljas så att $0 = y(1) = \tan(-\arctan(1) + C) = \tan(-\pi/4 + C)$. Då $\tan(x) = 0$ om och endast om $x = k\pi$ för något $k \in \mathbb{Z}$ får vi att alla val av $C = k\pi + \pi/4$ funkar. Men då tan är π-periodisk så är $y(x) = \tan(-\arctan(x) + k\pi + \pi/4) = \tan(-\arctan(x) + \pi/4) = -\tan(\arctan(x) - \pi/4)$ för alla $k \in \mathbb{Z}$ så vi kan likaväl välja $k = 0$.

Genom lite trigonometri kan lösningen förenklas till

$$y(x) = \frac{1-x}{1+x}.$$

Exempel 1.3.

a) Hitta alla lösningar till differentialekvationen

$$y'(x) - xy(x) = x.$$

b) Hitta den lösning som uppfyller att $y(1) = \pi$.

För att hitta den allmänna lösningen följer vi strategin ovan. Detta är en linjär första ordningen ODE (inte med konstanta koefficienter). Koefficienten framför $y(x)$ är $f(x) = -x$ så som integrerande faktor tar vi $e^{-x^2/2}$. Ekvationen blir då ekvivalent med

$$(e^{-x^2/2}y(x))' = e^{-x^2/2}x$$

vi tar primitiva av båda sidor och finner att

$$e^{-x^2/2}y(x) = \int e^{-x^2/2}x\,dx \quad \Rightarrow \quad y(x) = e^{x^2/2}\int e^{-x^2/2}x\,dx.$$

Vi vill beräkna integralen:

$$\begin{aligned}\int e^{-x^2/2} x\,dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2/2, \\ du = xdx \end{array} \right\} \\ &= \int e^{-u}\,du \\ &= -e^{-u} + C = -e^{-x^2/2} + C.\end{aligned}$$

Så vi finner till slut svaret på a) att den generella lösningen ges av

$$y(x) = e^{x^2/2}(-e^{-x^2/2} + C) = -1 + Ce^{x^2/2}$$

för $C \in \mathbb{R}$.

För att svara på b) sätter vi in $x = 1$ och får ekvationen

$$\pi = y(1) = -1 + Ce^{1/2} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi + 1}{\sqrt{e}}$$

så den sökta lösningen är

$$y(x) = -1 + \frac{\pi+1}{\sqrt{e}} e^{x^2/2} = -1 + (\pi + 1)e^{(x^2-1)/2}.$$

Exempel 1.4 (Uppgift 2, tentan 2018-06-05). Lös differentialekvationen

$$(x^2 + 4)y'(x) + 4xy(x) = x.$$

Lösning: Ekvationen är linjär av första ordningen och kan skrivas på standard formen (då $x^2 + 4 > 0$ delar vi inte med noll)

$$(x^2 + 4)y'(x) + 4xy(x) = x \quad \Leftrightarrow \quad y'(x) + \frac{4x}{x^2+4} y(x) = \frac{x}{x^2+4}$$

Ekvationen är även separabel då den kan skrivas som

$$\frac{1}{1 - 4y(x)} y'(x) = \frac{x}{4 + x^2},$$

men här ser det ut som det kan bli problem ifall $y(x) = 1/4$.

Låt oss lösa den med integrerande faktor. Koefficienten framför y är $f(x) = \frac{4x}{x^2+4}$ en primitiv till detta ges av $F(x) = 2\ln|x^2 + 4| = 2\ln(x^2 + 4)$ så vi kan ta som integrerande faktor $e^{2\ln(x^2+4)}$. Vi finner att ekvationen är ekvivalent med

$$(e^{2\ln(x^2+4)} y(x))' = e^{2\ln(x^2+4)} \frac{x}{x^2+4}$$

eller då $e^{2\ln(x^2+4)} = (x^2+4)^2$

$$((x^2+4)^2 y(x))' = x(x^2+4)$$

vi integrerar båda sidor och får att

$$(x^2+4)^2 y(x) = \int x(x^2+4)\,dx = x^4/4 + 2x^2 + C.$$

Vi finner således att den generella lösningen till ekvationen ges av

$$y(x) = \frac{x^4+8x^2+C}{4(x^2+4)^2}$$

för något $C \in \mathbb{R}$.

Vilket kan skrivas som $y(x) = \frac{1}{4} + \frac{C}{(x^2+4)^2}$ (men med en ny konstant). Vi ser således att alla lösningar som inte ges av $y(x) = 1/4$ håller sig borta från värdet $1/4$ (större än om $C > 0$ och mindre än om $C < 0$).

Man kan också lösa ekvationen med receptet för separabla ekvationer men då får man vara försiktig med vad som händer om $y(x) = 1/4$, här slapp vi det.