Examination, 15 January 2022
TMA683

Read this before you start!
Aid: Personal pocket calculator.
The Swedish version of the exam can be found just before the table of Laplace transforms.
Read all questions first and then start to answer the ones you feel most confortable with. Some parts of an exercise may be independent of the others.
You can write your answers in English, French, German or Swedish.
Write down all the details of your computations clearly so that each step is easy to follow.
Do not randomly display equations and hope for me to find the correct one. Justify your answers.
Write clearly what your solutions are and in the nicest possible form.
Don't forget that you can verify your solution in some cases.
The test has 7 pages (including the table of Laplace transforms) and a total of 50 points.
Valid bonus points will be added to the total score.
You will be informed via Canvas when the exams are corrected.

Good luck!

Some exercises were taken from, or inspired by, materials from *F. Bengzon*, *J.L. Kazdan*, *P. Kelly*, *M.G. Larson*, *www.math.etsu.edu*, *www.bibmath.net*, *www.wikipedia.org*.

---

1. Provide concise answers to the following short questions
   (a) Is an ODE a differential equation where the unknown function only depends on two independent variables? (1 p)
   (b) Which function space corresponds to span$(1, x, x^2)$? (1 p)
   (c) What lives in the trial space in the FEM? (1 p)
   (d) Is the energy of the homogeneous linear wave equation with homogeneous Dirichlet BC a conserved quantity? (1 p)
   (e) Why is the Laplace transform a linear operator? (1 p)
2. Let $(V, (\cdot,\cdot))$ be an inner product space and $u, v \in V$. Show that if u and v are linearly dependent then one has equality in the Cauchy–Schwarz inequality. (3 p)

   Hint: If you are not able to start, use the fact that $u = cv$ for some scalar c. Points will be deduced accordingly.
3. Use one step of the trapezoidal rule to approximate the area under the function $f(x) = x^2$ between $x = 0$ and $x = 1$. (1 p)
4. Consider the following problem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

for $x \in (0,1)$ and where the continuous function f is given. Provide suitable test and trial spaces for the variational formulation of the above BVP? Justify your answer (no need to give the variational formulation). Give one example of a function living in your test, resp. trial space. (4 p)

5. Give one property of the hat functions that is reflected in the final matrices coming from a (linear) Galerkin discretisation of a BVP or PDE in dimension one. Justify. (2 p)

6. Consider the boundary value problem

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 \quad \text{for} \quad x \in (0,2) \\ u'(0) = 1, \quad u(2) = 0. \end{cases}$$

   (a) Integrate the problem twice and give its exact solution. (2 p)
   (b) State the variational formulation to the above problem. (2 p)
   (c) Give the Galerkin (linear) FE problem in the case of one element of length $h = 2$. (2 p)
   (d) Finally solve the obtained linear system of equation and provide the FE solution

$$u_h(x) = \zeta_0 \varphi_0(x),$$

   where one recalls that $\varphi_0(x) = 1 - x/2$ and ζ_0 is the unknown. (2 p)

7. Consider the classical Poisson problem on $[0,1]$ with homogeneous Dirichlet boundary conditions from the lecture. What is the size of the error, measured in the energy norm, of the (continuous and piecewise linear) FEM with mesh size h as seen in the lecture? (2 p)

8. Show that the function $y(x) = \mathrm{e}^x$ is the unique solution to the initial value problem

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \quad \text{for} \quad x > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

   Approximate the value of e^1 by applying two iterations of the explicit Euler's method with step size $h = \frac{1}{2}$. (3 p)

9. Show that a linear FE space discretisation of the problem

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u(x,t) = f(x,t) \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \\ u(x,0) = g(x), \end{cases}$$

   where f, g are given (nice) functions and $x, t \in [0,1]$, leads to a system of ODEs of the form

$$M\dot{\zeta}(t) + A\zeta(t) + M\zeta(t) = F(t).$$

   Identify the matrices A and M as well as the vector F. Be brief. (2 p)

10. What is the Laplace transform of e^{t^2}? (2 p)

11. Let $b \in \mathbb{R}$. Using the properties of Laplace transforms of derivatives and the fact that $\mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$, find the value of $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s)$. (2 p)

12. Solve the following initial value problem using Laplace transform
$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1. \qquad (4\text{ p})$$
Hint: If you are not able to find $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, you can use
$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$
to answer the rest of the exercise. Points will be deduced accordingly.

13. Consider the space $L^2(-1,1)$ with the standard inner product. Show that any even (integrable) function is orthogonal in this space to any odd (integrable) function. (2 p)

14. Compute the Fourier series of the 2π-periodic function $f(x) = 2 + 6\cos(5x)$ defined on $[-\pi, \pi]$. Justify. (2 p)

15. Find the coefficients (a_n and b_n) of the Fourier series of the 2π-periodic function
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in [0,\pi) \\ -1 & \text{for } x \in [-\pi, 0). \end{cases} \qquad (4\text{ p})$$

16. Knowing that the Fourier series of the 2π-periodic function $f(x) = x^2$, defined for $-\pi \leq x \leq \pi$, satisfies
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx),$$
find the values of the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (by a clever choice for x) and $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (by Parseval). (2 p)
Hint: Parseval identity reads
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

17. Separate the partial differential equation
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + 2x\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$
into a differential equation involving only x and one involving only y. (2 p)

Svenska versionen av tentan

1. Ge kortfattade svar på följande frågor

   (a) Är en ODE en differentialekvation där den okända funktionen bara beror på två oberoende variabler? (1 p)

   (b) Vilket funktionsrymme motsvarar span$(1, x, x^2)$? (1 p)

   (c) Vilken funktion tillhör försöksrummet i FEM? (1 p)

   (d) Är energin för den homogena linjära vågekvationen med homogena Dirichlet randvillkor en bevarad storhet? (1 p)

   (e) Varför är Laplacetransformen en linjär operator? (1 p)

2. Låt $(V, (\cdot,\cdot))$ vara ett inre produktrym och $u, v \in V$. Visa att om u och v är linjärt beroende då har man likhet i Cauchy–Schwarz olikhet. (3 p)

   Tips: Om du inte vet hur du ska börja, använd då att $u = cv$ för någon skalär c. Poäng kommer att dras av därefter.

3. Använd trapetsregeln (med ett steg) för att approximera området under funktionen $f(x) = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = 1$. (1 p)

4. Betrakta följande problem
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$
   där $x \in (0, 1)$ och den kontinuerliga funktionen f är given. Vilka test- och provrymmen är lämpliga för att ange en variationsformuleringen för ovanstående BVP? Motivera. Ge ett exempel på en funktion som ligger i dessa testrynmmen, resp. provrymmen. (4 p)

5. Ange en egenskap hos hattfunktionerna som återspeglas i de slutliga matriserna som kommer från en (linjär) Galerkin-diskretisering av en BVP eller PDE i en dimension. Motivera. (2 p)

6. Betrakta följande BVP
$$\begin{cases} -u''(x) = 0 \quad \text{för} \quad x \in (0, 2) \\ u'(0) = 1, \quad u(2) = 0. \end{cases}$$

   (a) Integrera problemet två gånger och ange den exakta lösningen. (2 p)

   (b) Ange variationsformuleringen till ovanstående problem. (2 p)

   (c) Formulera Galerkin (linjär) FE-problemet med ett steglängd $h = 2$. (2 p)

   (d) Lös slutligen det erhållna linjära ekvationssystemet och ange FE-lösningen på formen
$$u_h(x) = \zeta_0 \varphi_0(x),$$
   där $\varphi_0(x) = 1 - x/2$ och ζ_0 är det okända. (2 p)

7. Betrakta det klassiska Poisson problemet på $[0,1]$ med homogena Dirichletvillkor. Vad är storleken på felet, mätt i energinormen, för den klassiska FEM-formuleringen med maximal grid-storlek h som visats på föreläsningarna? (2 p)

8. Visa att funktionen $y(x) = \mathrm{e}^x$ är den unika lösningen till initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \quad \text{för} \quad x > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Uppskatta värdet av e^1 genom att tillämpa två iterationer av den explicita Eulermetoden med steglängd $h = \frac{1}{2}$. (3 p)

9. Visa att en linjär FE rumsdiskretisering av problemet

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u(x,t) = f(x,t) \\ u(0,t) = 0 = u(1,t) \\ u(x,0) = g(x), \end{cases}$$

där f, g är givna (snälla) funktionen och $x, t \in [0,1]$, leder till ett system av ODE på formen

$$M\dot{\zeta}(t) + A\zeta(t) + M\zeta(t) = F(t).$$

Identifiera matriserna A och M samt vektorn F. Fatta dig kort. (2 p)

10. Vad är Laplacetransformen av e^{t^2}? (2 p)

11. Låter $b \in \mathbb{R}$. Använd egenskaperna hos Laplacetransformen av derivator och att $\mathcal{L}\{\sin(bt)\}(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$, för att bestämma $\mathcal{L}\{\cos(bt)\}(s)$. (2 p)

12. Lös följande initialvärdesproblem med hjälp av Laplacetransformen

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 1, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1. \qquad (4\text{ p})$$

Tips: Om du inte kan hitta ett uttryck för $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, då kan du använda att

$$Y(s) = \frac{s+1}{s(s+2)(s+3)}$$

för att svara på resten av frågan. Poäng kommer att dras av därefter.

13. Betrakta rymmet $L^2(-1,1)$ med standardinreprodukten. Visa att varje jämn (och integrerbar) funktion är ortogonal mot varje udda (och integrerbar) funktion. (2 p)

14. Bestäm Fourier-serien för den 2π-periodiska funktionen $f(x) = 2+6\cos(5x)$ definerad på $[-\pi,\pi]$. Motivera. (2 p)

15. Bestäm koefficienterna (a_n och b_n) av Fourier-serien för den 2π-periodiska funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{för } x \in [0,\pi) \\ -1 & \text{för } x \in [-\pi,0). \end{cases} \qquad (4\text{ p})$$

16. Fourier-serien för den 2π-periodiska funktionen f definierad av $f(x) = x^2$ för $x \in [-\pi, \pi]$ ges av
$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$
Använd detta för att bestämma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (genom ett smart val av x) och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (med hjälp av Parsevals formel). (2 p)
Tips: Parsevals formel säger att
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}|a_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

17. Separera den partiella differentialekvationen
$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + 2x\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0$$
i den differentialekvation som endast involverar x och en som endast involverar y. (2 p)

Table of Laplace Transforms and trigonometry

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin(bt)$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin(bt) - bt\cos(bt))$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$

$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$