Examination, 16 January 2021
TMA683

Read this before you start!
The Swedish version of the exam can be found just before the table of Laplace transforms.
Read all questions first and start to answer the ones you like most.
You can write your answers in English, French, German or Swedish.
Write down all the details of your computations clearly so that each steps are easy to follow.
Do not just randomly display equations and hope for someone to find the correct one. Justify your answers.
Write clearly what your solutions are and in the nicest possible form.
Don't forget that you can verify your solution in some cases.
Use a proper pen, check your final scan before uploading, and if possible order your answers.
The test has 8 pages (including the table of Laplace transforms) and a total of 50 points.
Valid bonus points will be added to the total score.
You will be informed when the exams are corrected.

"Jag försäkrar att jag gjort tentan på egen hand utan att få hjälp från någon annan person och att jag själv formulerat alla lösningar."
Check the box □
Good luck!

Some exercises were taken from, or inspired by, materials from *Mohammad Asadzadeh*, *Magnus Önnheim*, *www.bibmath.net*.

---

1. Let the function f be of class $C^1(-\pi,\pi)$, 2π-periodic, and real-valued. Show that f is orthogonal (in $L^2(-\pi,\pi)$) to its derivative. (2 p)

2. Consider the ordinary differential equation

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Write the above as an integral equation (justify). Let $k > 0$ and consider this integral equation on the small interval $[0,k]$. Apply the trapezoidal rule to the integral. From this last computation, using $y_1 \approx y(k)$, derive the Crank–Nicolson scheme for solving the above ODE. (4 p)

Hint: If you are not able to find the integral equation, consider the following

$$y(k) = y_0 + \int_0^k f(y(s))\,ds$$

to answer the rest of the exercise. Points will be deduced accordingly.

3. Consider the following problem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

where $x \in (0,1)$ and the continuous function f is given. Which test and trial spaces would you consider to find a variational formulation of the above BVP? Justify your answer. Give one example of a function living in your test and trial spaces. (4 p)

4. Consider the following BVP

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 \\ u(0) = 2, \quad u'(1) = 3, \end{cases}$$

where $x \in (0,1)$. Assume that the interval $[0,1]$ is divided into three subintervals of equal length h. Consider the corresponding space of continuous piecewise linear functions V_h.

(a) Describe V_h in terms of hat functions and plot these hat functions. (2 p)

(b) Verify that the ansatz for the finite element problem

$$u_h(x) = 2\varphi_0(x) + \zeta_1\varphi_1(x) + \zeta_2\varphi_2(x) + \zeta_3\varphi_3(x)$$

yields the following system of linear equations

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h^{-1} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Here, you just need to compute the two non-zero terms of the load vector and the last entry of the matrix. No need to compute the rest neither to solve the linear system. (4 p)

5. Consider a Poisson problem on $[0,1]$ with homogeneous Dirichlet boundary conditions. What is the size of the error, measured in the energy norm, of the classical FEM with mesh size h seen in the lecture? (2 p)

6. Consider the following MATLAB function

```
function [t,y] = solveit(t0, y0, T, n)
  t = zeros(n+1,1); y = zeros(n+1,1);
  t(1) = t0; y(1) = y0; h = (T-t0)/n;
  for i = 1:n
    t(i+1) = t(i)+h;
    y(i+1) = y(i)+h*(y(i))^2;
  end
```

Suppose that the input values are $t0 = 0, y0 = 1, T = 1$, and $n = 10$.

(a) What is the initial-value problem being approximated numerically? (2 p)

(b) What is the numerical method being used? (2 p)

(c) What is the numerical value of the step size? (1 p)

(d) What is the output value of the first approximation? (2 p)

7. Consider the one-dimensional heat equation ($0 < x < 1$ and $0 < t < T$)

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x, \end{cases}$$

Show that $||u(\cdot,t)||_{L^2(0,1)}$ is non-increasing in time. (3 p)

Hint: You may first show that

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(\cdot,t)||^2_{L^2(0,1)} \leq 0$$

which can be shown manipulating the differential equation and using an integration by parts.

8. Compute the Laplace transform of 1 using only the definition of the Laplace transform. Specify the domain of definition of the Laplace transform. (2 p)

9. Show that the inverse Laplace transform of

$$Y(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{7}{s^5}$$

reads

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = 6e^{-t} + \frac{7}{24}t^4.$$ (2 p)

10. Solve the following integral equation using Laplace transform

$$y'(t) + 2y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,d\tau = 3, \quad y(0) = 2.$$ (4 p)

Hint: If you are not able to find $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, you can use

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

to answer the rest of the exercise. Points will be deduced accordingly.

11. Compute the Fourier series of the 2π-periodic function $f(x) = 2 + 6\sin(x)$ defined on $[-\pi,\pi]$. Justify. (4 p)

12. Compute the Fourier series of the 4-periodic function

$$f(x) = x \quad \text{for} \quad 0 < x < 4$$

and extended periodically. (4 p)

13. Using Parseval's identity, show that two continuous, piecewise smooth, 2π-periodic functions $f, g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ having the same Fourier coefficients are equal. (2 p)

    Hint: Consider $h = f - g$ and use the fact that if $\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2 \, dx = 0$, then $h = 0$ (since h is a continuous function).

14. Separate the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

    into a differential equation involving only x and one involving only t. (2 p)

15. Consider the nonhomogeneous wave equation ($0 < x < 1, 0 < t < T$)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

    with given functions f, g. Which technique, seen in the lecture, permits to write $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$? Give the two corresponding problems for v and w. No need to solve them. (2 p)

Svenska versionen av tentan

1. Låt funktionen f vara av klass $C^1(-\pi,\pi)$, 2π-periodisk, och real. Visa att f är ortogonal (i $L^2(-\pi,\pi)$) mot dess derivata. (2 p)

2. Betrakta den ordinära differentialekvation

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Skriv ovanstående som en integralekvation (motivera). Låt $k > 0$ och betrakta integralekvationen på det lilla intervallet $[0,k]$. Använda trapetsregeln. Från den senaste beräkningen, med hjälp av $y_1 \approx y(k)$, härled Crank–Nicolson-schemat för att lösa ODE:n ovan. (4 p)

Tips: Om du inte kan hitta integralekvationen, använd

$$y(k) = y_0 + \int_0^k f(y(s))\,ds$$

för att svara på resten av frågan. Poäng kommer att dras därefter.

3. Betrakta följande problem

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

där $x \in (0,1)$ och den kontinuerliga funktionen f är given. Vilka test- och provutrymmen skulle du betrakta för att hitta en variationsformulering till ovanstående BVP? Motivera. Ge ett exempel på en funktion som ligger i dessa test- och provutrymmen. (4 p)

4. Betrakta följande BVP

$$\begin{cases} -u''(x) = 0 \\ u(0) = 2, \quad u'(1) = 3, \end{cases}$$

där $x \in (0,1)$. Antag att intervallet $[0,1]$ är uppdelat i tre delintervall med lika längd h. Betrakta motsvarande utrymme för kontinuerliga styckvis linjära funktioner V_h.

(a) Beskriv V_h med hattfunktioner och plotta dessa hattfunktioner. (2 p)

(b) Verifiera att anstazen för problemet med finita elment

$$u_h(x) = 2\varphi_0(x) + \zeta_1\varphi_1(x) + \zeta_2\varphi_2(x) + \zeta_3\varphi_3(x)$$

ger följande system av linjära ekvationer

$$\frac{1}{h}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2h^{-1} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Här behöver du bara beräkna de två icke-nolltermerna för lastvektorn och det sista elementet i matrisen. Du behöver inte beräkna resten, eller lösa det linjära systemet. (4 p)

5. Betrakta ett Poisson problem i $[0,1]$ med homogena Dirichlet-gränsvillkor. Vad är storleken på felet, mätt i energinormen, för den klassiska FEM-formuleringen med maskstorlek h sett i föreläsningen? (2 p)

6. Betrakta följande Matlab funktion

```
function [t,y] = solveit(t0, y0, T, n)
  t = zeros(n+1,1); y = zeros(n+1,1);
  t(1) = t0; y(1) = y0; h = (T-t0)/n;
  for i = 1:n
    t(i+1) = t(i)+h;
    y(i+1) = y(i)+h*(y(i))^2;
  end
```

Antag att ingångsvärdena är $t0 = 0, y0 = 1, T = 1$, och $n = 10$.

(a) Vad är initialvärdesproblemet som approximeras numeriskt? (2 p)

(b) Vad är den numeriska metoden som används? (2 p)

(c) Vad är det numeriska värdet på stegstorleken? (1 p)

(d) Vad är utgångsvärdet, $y(i+1)$, efter den första iterationen? (2 p)

7. Betrakta den endimensionella värmekvationen ($0 < x < 1$ och $0 < t < T$)

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \\ u(0,t) = u_x(1,t) = 0 \\ u(x,0) = x, \end{cases}$$

Visa att $\|u(\cdot,t)\|_{L^2(0,1)}$ är icke ökande i tid. (3 p)

Tips: Du kan först visa att

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2_{L^2(0,1)} \leq 0$$

som kan erhållas genom att manipulera differentialekvationen och använda partialintegration.

8. Beräkna Laplacetransform av 1 endast med definitionen av Laplacetransformen. Ange definitionsdomänen för Laplacetransformen. (2 p)

9. Visa att invers Laplacetransform av

$$Y(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{7}{s^5}$$

är

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = 6\mathrm{e}^{-t} + \frac{7}{24}t^4. \quad (2 \text{ p})$$

10. Lös följande integralekvation med Laplacetransform

$$y'(t) + 2y(t) + 5\int_0^t y(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 3, \quad y(0) = 2. \qquad (4\text{ p})$$

Tips: Om du kan inte hitta $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, *kan du använda*

$$Y(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{(s+1)^2+4}$$

för att svara på resten av frågan. Poäng kommer att dras därefter.

11. Beräkna Fourier-serien för 2π-periodisk funktion $f(x) = 2 + 6\sin(x)$ definierad på $[-\pi, \pi]$. Motivera. (4 p)

12. Beräkna Fourier-serien för 4-periodisk funktion

$$f(x) = x \quad \text{för} \quad 0 < x < 4$$

och förläng periodisk. (4 p)

13. Använd Parsevals identitet för att visa att två kontinuerliga, piecewise smooth, 2π-periodisk funktioner $f, g\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ med samma Fourier-koefficienter är equivalent ($f = g$). (2 p)

Tips: Betrakta $h = f - g$ *och använd faktumet att om* $\int_{-\pi}^{\pi} |h(x)|^2\, dx = 0$, *då är* $h = 0$ *(eftersom* h *är en kontinuerlig funktion).*

14. Separera den partiella differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

i en differentialekvation som endast involverar x och en som endast involverar t. (2 p)

15. Betrakta den icke-homogena vågekvationen ($0 < x < 1, 0 < t < T$)

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

med givna funktioner f, g. Vilken teknik från föreläsningen tillåter att skriva $u(x,t) = v(x) + w(x,t)$? Ge de två motsvarande problemen för v och w. Du behöver inte lösa för u och w. (2 p)

Table of Laplace Transforms and trigonometry

$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T)$	$e^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\, d\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\frac{t}{2b}\sin(bt)$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin(bt) - bt\cos(bt))$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$

$$2\sin(a)\sin(b) = \cos(a-b) - \cos(a+b)$$
$$2\sin(a)\cos(b) = \sin(a-b) + \sin(a+b)$$
$$2\cos(a)\cos(b) = \cos(a-b) + \cos(a+b)$$