David Cohen (david.cohen@chalmers.se) Chalmers & GU

Examination, 14 January 2023
TMA683

Read this before you start!
I will try to come at ca. 10:00. You can ask for calling me (0317723021) in case of questions.
Aid: Personal pocket calculator.
The Swedish version of the exam can be found just before the table of Laplace transforms.
Read all questions first and then start to answer the ones you feel most comfortable with. Some parts of an exercise may be independent of the others.
I tried to use the same notation as in the lecture.
Answers may be given in English, French, German or Swedish.
Write down all the details of your computations clearly so that each steps are easy to follow.
Do not randomly display equations and hope for me to find the correct one. Justify your answers.
Write clearly what your solutions are and in the nicest possible form.
Don't forget that you can verify your solution in some cases.
Use a proper pen and order your answers if possible.
The test has 7 pages and a total of 50 points.
Preliminary grading limits: 3: 20-29p, 4: 30-39p and 5: 40-50p.
Valid bonus points will be added to the total score if needed.
You will be informed via Canvas when the exams are corrected.

Good luck!

Some exercises were taken from, or inspired by, materials from *www.bibmath.net*, *S. Le Coz*, *mathonline.wikidot.com*, *P. Maréchal*, *nitsri.ac.in*, *tobydriscoll.net*, *www.uah.edu*, *J. Wong*, *W-C Xie*.

---

1. Is the PDE $u_t(x,t) - u_x(x,t)^3 + 22u(x,t) = 0$ a linear PDE of order 3? Justify your answer. (2p)

2. Let A, B be two 2×2 matrices and consider the map $\langle A, B\rangle = \det(AB)$. Is this map an inner product on the space of 2×2 matrices? (2p)

   Hint: Consider $\langle A, A\rangle$.

3. Give the Lagrange interpolation polynomial through the two points $(1,2)$ and $(3,4)$. (2p)

4. Use the trapezoidal rule to approximate the area under the curve $f(x) = x^2$ between $x = 0$ and $x = 1$. (2p)

5. Consider the ordinary differential equation

$$\dot{y}(t) = 3y(t) \quad \text{for} \quad t \in [0,1], \quad y(0) = 1.$$

   Apply forward Euler's scheme to get a numerical approximation of e^{3t}. Justify. (4p)

6. Give one property of the hat functions that is reflected in the final matrices coming from a Galerkin discretisation of a BVP or of a PDE seen in the lecture. (2p)

7. Let $\Omega = (0, \pi)$. We want to solve numerically the BVP

$$-u_{xx}(x) + 4u(x) = x, \quad \text{in } \Omega = (0, \pi),$$

with homogeneous Dirichlet boundary conditions.

   (a) Derive the variational form of the above problem. (2p)

   (b) Use the basis functions $\varphi_j(x) = \{\sin(jx)\}_{j=1}^3$ to define a Galerkin approximation of this problem. Give the 3×3 matrix A in the final linear system of equation $A\zeta = b$ and compute explicitly the vector b (no need to compute the matrix A). (3p)

8. Let $\Omega = (0, 1)$ and $f \in L^2(\Omega)$. Consider the problem

   Find $u \in H_0^1(\Omega)$ such that $\int_\Omega u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ for all $v \in H_0^1(\Omega)$.

   Let $u_h \in V_h^0$ be the corresponding cG(1) approximation to u on a uniform partition with mesh size h. Consider then the auxiliary problem

   Find $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ such that $\int_\Omega \zeta'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (u(x) - u_h(x))\, v(x)\,\mathrm{d}x$ for all $v \in H_0^1(\Omega)$.

   (a) Using the above auxiliary problem and Galerkin's orthogonality, first show that

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (u(x) - u_h(x))'(\zeta(x) - \pi_h\zeta(x))'\,\mathrm{d}x,$$

   where we recall that $\pi_h\zeta \in V_h^0$ denotes the continuous piecewise linear interpolant of ζ. (3p)

   (b) Next, using an interpolation error estimate (observe that $\zeta \in H^2(\Omega)$ since $-\zeta'' = u - u_h$), show the following error estimate for the cG(1) approximation:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch\,\|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)}\,. \qquad (2p)$$

9. Use partial fractions to evaluate the inverse Laplace transform

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2 - 28}{(s-4)(s^2+4)}\right\}. \qquad (4p)$$

   Hint: If you are not able to rewrite the above fraction, consider the following

$$\frac{3s^2 - 28}{(s-4)(s^2+4)} = \frac{1}{s-4} + \frac{2s+8}{s^2+4}$$

   to answer the rest of the exercise. Points will be deduced accordingly.

10. Use the Laplace transform to solve the differential equation

$$y'(t) + 2y(t) = \theta(t) - \theta(t-1),$$

with $y(0) = -2$ and where we recall that θ is the Heaviside/unit step function. (4p)

11. What is the definition of a periodic function of period p? (1p)

12. Let f be 2π-periodic and defined on $[-\pi, \pi]$. How do you write the Fourier coefficient c_0 of the Fourier series of f? (1p)

13. Let $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the 2π-periodic function defined by $f(x) = x$ for $x \in]-\pi, \pi]$ and extended periodically. Compute the Fourier coefficients a_n and b_n of the function f. (4p)

14. Knowing that the 2π-periodic function $f(x) = x^2$, for $-\pi < x \leq \pi$, has the convergent Fourier series

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx),$$

deduce the values of the series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$ (5p)

15. Use separation of variables to solve the partial differential equation

$$\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x} &= u + y\frac{\partial u}{\partial y} \\ u(1,1) &= 2 \\ u(1,2) &= 8. \end{aligned}$$ (4p)

Hint: Integrate to solve the first-order separable ODEs.

16. Consider the nonhomogeneous PDE ($0 < x < 1, 0 < t < T$)

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = -6x \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

with a given (nice) function f. Using the superposition principle and the ansatz $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$, find a homogeneous PDE for v (no need to solve this problem) and solve the corresponding BVP for s. (3p)

Svenska versionen av tentan

1. Är $u_t(x,t) - u_x(x,t)^3 + 22u(x,t) = 0$ en linjär PDE av ordningen 3? Motivera ditt svar. (2p)

2. Låt A, B vara två 2×2-matriser och betrakta avbildningen $\langle A, B\rangle = \det(AB)$. Är den här avbildningen en inre produkt på rummet av 2×2-matriser? (2p)

   Hint: Betrakta $\langle A, A\rangle$.

3. Uppge Lagrange-interpolationspolynomet genom de två punkterna $(1, 2)$ och $(3, 4)$. (2p)

4. Använd trapetsregeln för att approximera arean under kurvan $f(x) = x^2$ mellan $x = 0$ och $x = 1$. (2p)

5. Betrakta den ordinära differentialekvationen

$$\dot{y}(t) = 3y(t) \quad \text{för} \quad t \in [0, 1], \quad y(0) = 1.$$

   Använd Eulers framåtmetod för att få en numerisk approximation av e^{3t}. Motivera ditt svar. (4p)

6. Uppge en egenskap hos hattfunktionerna som återspeglas i de slutliga matriserna som kommer från en Galerkin-diskretisering av en BVP eller av en PDE som ses i föreläsningen. (2p)

7. Låt $\Omega = (0, \pi)$. Vi vill numeriskt lösa följande BVP

$$-u_{xx}(x) + 4u(x) = x, \quad \text{i } \Omega = (0, \pi),$$

   med homogena Dirichlet-randvillkor.

   (a) Härled variationsformuleringen för ovanstående problem. (2p)

   (b) Använd basfunktionerna $\varphi_j(x) = \{\sin(jx)\}_{j=1}^{3}$ för att definiera en Galerkin approximation av detta problem. Uppge 3×3-matrisen A i det slutliga linjära ekvationssystemet $A\zeta = b$ och beräkna uttryckligen vektorn b (ni behöver inte beräkna matrisen A). (3p)

8. Låt $\Omega = (0, 1)$ och $f \in L^2(\Omega)$. Betrakta problemet

   Hitta $u \in H_0^1(\Omega)$ så att $\int_\Omega u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ för alla $v \in H_0^1(\Omega)$.

   Låt $u_h \in V_h^0$ vara motsvarande cG(1) approximation till u på en likformig indelning med steglängd h. Betrakta hjälpproblemet

   Hitta $\zeta \in H_0^1(\Omega)$ så att $\int_\Omega \zeta'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega (u(x) - u_h(x))\,v(x)\,\mathrm{d}x$ för alla $v \in H_0^1(\Omega)$.

   (a) Med hjälp av ovanstående hjälpproblem och Galerkins ortogonalitet, visa först att

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega (u(x) - u_h(x))'(\zeta(x) - \pi_h\zeta(x))'\,\mathrm{d}x,$$

   där $\pi_h\zeta \in V_h^0$ är den kontinuerliga styckvis linjära interpolanten av ζ. (3p)

(b) Använd sedan en uppskattning av interpolationsfel (observera att $\zeta \in H^2(\Omega)$ eftersom $-\zeta'' = u - u_h$) för att visa följande feluppskattning för cG(1) approximationen:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch \, \|(u - u_h)'\|_{L^2(\Omega)} \, . \qquad (2p)$$

9. Använd partialbråksuppdelning för att bestämma den inverse Laplacetransformen

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s^2 - 28}{(s-4)(s^2+4)}\right\}. \qquad (4p)$$

Hint: Om du inte kan skriva om bråkdelen ovan, då kan du anta att följande gäller

$$\frac{3s^2 - 28}{(s-4)(s^2+4)} = \frac{1}{s-4} + \frac{2s+8}{s^2+4}$$

för att svara på resten av övningen. Poäng kommer att dras av i enlighet med detta.

10. Använd Laplace-transformen för att lösa differentialekvationen

$$y'(t) + 2y(t) = \theta(t) - \theta(t-1),$$

med $y(0) = -2$ och där θ är Heavisides stegfunktion (eng. Heaviside/unit step function). (4p)

11. Vad är definitionen av en periodisk funktion med perioden p? (1p)

12. Låt f vara 2π-periodiska och definierad på $[-\pi, \pi]$. Vad ges Fourierkoefficienten c_0 för f av? (1p)

13. Låt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vara 2π-periodiska funktionen definierad av $f(x) = x$ för $x \in]-\pi, \pi]$ och förlängd periodisk. Beräkna Fourierkoefficienterna a_n och b_n för funktionen f. (4p)

14. Använd att den 2π-periodiska funktionen definierad av $f(x) = x^2$ för $-\pi < x \leq \pi$ har följande konvergenta Fourier-serie

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos(kx)\,,$$

för att härleda följande seriers värden

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}. \qquad (5p)$$

15. Använd variabelseparation för att lösa den partiella differentialekvationen

$$x\frac{\partial u}{\partial x} = u + y\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$u(1,1) = 2$$
$$u(1,2) = 8. \qquad (4p)$$

Hint: Använd integration för att lösa första ordningens separerbara ODE.

16. Betrakta följande icke-homogena PDE ($0 < x < 1$, $0 < t < T$)

$$\begin{cases} u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = -6x \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

med en given (snäll) funktion f. Använd superpositionsprincipen och ansatzen $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$, för att finna en homogen PDE för v (du behöver inte lösa detta problem) och lös motsvarande BVP för s. (3p)

Table of Laplace Transforms and trigonometry

$f(t)$	$F(s)$
$af(t)+bg(t), \quad a,b\in\mathbb{R}$	$aF(s)+bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t). \quad n=1,2,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\mathrm{e}^{-at}f(t), \quad a\in\mathbb{R}$	$F(s+a)$
$f(t-T)\theta(t-T), \quad T\in\mathbb{R}$	$\mathrm{e}^{-Ts}F(s)$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t), \quad n=1,2,\dots$	$s^nF(s)-\sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{(k-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$	$\frac{F(s)}{s}$
$\theta(t)$	$\frac{1}{s}, \quad s>0$
$\frac{t^n}{n!}, \quad n=1,2,\dots$	$\frac{1}{s^{n+1}}, \quad s>0$
$\mathrm{e}^{-at}, \quad a\in\mathbb{R}$	$\frac{1}{s+a}, \quad s>-a$
$\cosh(at), \quad a\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2-a^2}, \quad s>\|a\|$
$\sinh(at), \quad a\in\mathbb{R}$	$\frac{a}{s^2-a^2}, \quad s>\|a\|$
$\cos(bt), \quad b\in\mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+b^2}, \quad s>0$
$\sin(bt), \quad b\in\mathbb{R}$	$\frac{b}{s^2+b^2}, \quad s>0$
$\frac{t}{2b}\sin(bt), \quad b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\frac{s}{(s^2+b^2)^2}, \quad s>0$
$\frac{1}{2b^3}\left(\sin(bt)-bt\cos(bt)\right), \quad b\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}, \quad s>0$

$$2\sin(a)\sin(b)=\cos(a-b)-\cos(a+b)$$
$$2\sin(a)\cos(b)=\sin(a-b)+\sin(a+b)$$
$$2\cos(a)\cos(b)=\cos(a-b)+\cos(a+b)$$